Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Hanjo Täubig
Jeremias Weihmann

Sommersemester 2014
Übungsblatt 1
14. April 2014

Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabetermin: Jeweilige Tutorübung vom 28. April bis 2. Mai

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Schulmethode der Division. Hierbei untersuchen wir die Zahl der (elementaren) Operationen, die wir benötigen, um eine n-stellige Zahl durch eine einzelne *Ziffer* ganzzahlig mit Rest zu teilen. Für zwei Zahlen $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ bezeichne $g(a, b) := \lfloor a/b \rfloor$ das Ergebnis der ganzzahligen Division von a durch b, sowie $r(a, b) := a - g(a, b) \cdot b$ den Rest der ganzzahligen Division. Weiterhin bezeichne $a.b$ die Konkatenation zweier Ziffern a und b.

Der folgende Pseudocode beschreibt die Schulmethode. Der Dividend bestehe aus den Ziffern $x_1 \ldots x_n$ und der Divisor sei $y > 0$. Der Zähler i ist die aktuell betrachtete Stelle und $z_1.z_2 \ldots$ die Ziffern des Ergebnisses der ganzzahligen Division.

Algorithmus 1 : Ganzzahlige Division mit Rest

Input : Ziffer[] $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Ziffer y
int $i := 1$
Ziffer $x_0 := 0$ /* Hilfsziffer zur Vermeidung von Fallunterscheidung */
while $i \leq n$ **do**
  if $x_{i-1} > 0$ **then**
    Ziffer $z_i := g(x_{i-1}.x_i, y)$
    $x_i := r(x_{i-1}.x_i, y)$
    $x_{i-1} := 0$ /* Diese Zeile dient nur der Intuition und kann prinzipiell auch weggelassen werden */
  else
    Ziffer $z_i := g(x_i, y)$
    $x_i := r(x_i, y)$
  $i := i + 1$
Das Ergebnis der Division ist $z_1.z_2 \ldots$, der Rest is x_n.

Beispiel: 36811 ganzzahlig dividiert durch 4. Der Punkt markiert die aktuelle Position. Auf der linken Seite sind die Ziffern $x_0 \dots x_n$, auf der rechten Seite die wachsende Ziffernfolge $z_1 \dots z_n$ abgebildet.

```
036811  -> 0
 .

036811  -> 09
  .

000811  -> 092
   .

000011  -> 0920
    .

000011  -> 09202
     .

000003  -> 09202 Rest 3
      .
```

Für die Auswertung von $g(x_i.x_{i+1}, y)$ und $r(x_i.x_{i+1}, y)$ verwenden wir im Vorraus berechnete Tabellen. Wir *legen fest*, dass in unserem Modell jeder Vergleich zweier Zahlen, jede Konkatenation zweier Ziffern, jede Zuweisungsoperationen, sowie jede Nachschlageoperationen in den Tabellen eine Grundoperation darstellt. Man beachte, dass dieses Modell die Grundoperationen detaillierter aufschlüsselt als es beim Multiplikationsalgorithmus aus der Vorlesung der Fall war.

Wie viele Grundoperationen hat die Schulmethode in unserem Rechenmodell im schlimmsten Fall, wenn man eine Zahl mit n Ziffern ganzzahlig durch eine Ziffer teilt?

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$:

(a) $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$,

(b) $19 | (5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$ (In Worten: 19 teilt $(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$),

(c) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$,

wobei F_n die n-te Fibonaccizahl nach der rekursiven Definition $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ ist.

Zusatzaufgabe 1

Beweisen Sie die Gleichheit $\sum_{i=1}^{\infty} ic^i = \frac{c}{(1-c)^2}$ für $|c| < 1$ jeweils durch die folgende Methode:

(a) Zeigen Sie die Gleichheit $\sum_{i=1}^{n} ic^i = \frac{nc^{n+2}-(n+1)c^{n+1}+c}{(1-c)^2}$ per Induktion und führen Sie anschließend einen Grenzübergang $n \to \infty$ durch.

(b) Verwenden Sie die Indexverschiebungsmethode.

(c) Verwenden Sie die Ableitungsmethode (i.e. ein Term unter einer Summe wird als Ableitung formuliert, anschließend wird Summe und Ableitung vertauscht).

Die Gleichheit $\sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1-c}$ darf als bewiesen vorausgesetzt werden, sowie die Tatsache, dass $\sum_{i=1}^{\infty} ic^i$ eine konvergente Potenzreihe ist.

Hausaufgabe 1

Ein bekanntes Nim-Spiel ist wie folgt definiert. Gegeben ist eine Reihe von $n \in \mathbb{N}$ Streichhölzern. Zwei Spieler, A und B, ziehen abwechselnd zwischen einem und $k \in \mathbb{N}$ Streichhölzern, wobei k eine vorher vereinbarte obere Schranke für die Anzahl der Streichhölzer ist, die pro Zug aus dem Spiel entfernt werden dürfen. Derjenige Spieler, der das letzte Streichholz nimmt, hat verloren.

Intuitiv ist die Annahme nicht zu gewagt, dass der Spieler, der den ersten Zug hat, seinen Sieg für einige n durch eine geeignete Spielstrategie erzwingen kann und möglicherweise für einige andere n in einer Verlustposition ist, falls der zweite Spieler stets die richtigen Antworten findet. Wir nehmen im Folgenden an, dass Spieler A beginnt.

(a) Sei M_A die Menge aller n, für die Spieler A sicher gewinnen kann. Analog sei die Mege M_B definiert. Überlegen Sie sich, welche Zahlen in M_A und welche in M_B sind. Probieren Sie kleine Beispiele aus, um ein Gefühl für das Spiel zu gewinnen.

(b) Beweisen Sie formal, dass die von Ihnen in Teilaufgabe (a) gefundenen Mengen M_A und M_B die geforderten Eigenschaften besitzen. Verwenden Sie dazu vollständige Induktion über die Zahl n der Streichhölzer.

(c) Ihr Beweis induziert (bzw. enthält implizit) einen Algorithmus, der zu einer gegebenen Spielsituation einen gewinnenden Spielzug für den ersten Spielers ausgibt (sofern es sich unter der Annahme eines optimal spielenden zweiten Spielers um eine gewinnbare Spielsituation handelt). Geben Sie diesen Algorithmus an.

Hausaufgabe 2

Implementieren Sie obiges Nim-Spiel in Java. Der Benutzer soll die Anzahl n der Streichhölzer, die maximal erlaubte Zahl k an entfernbaren Streichhölzern pro Spielzug, sowie den ersten Spieler bestimmen können. Dann soll Ihr Programm gegen den Benutzer mit Ihrer oben definierten Gewinnstrategie spielen, sofern diese Strategie auf die aktuelle Streichholzzahl anwendbar ist. Falls die Spielsituation keine Gewinnstrategie für Ihr Programm erlaubt, soll die Zahl der gezogenen Streichhölzer zufällig sein.

Hausaufgabe 3

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hausaufgabe 4

Die n-te Harmonische Zahl H_n ist definiert als

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} .$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $1 + \frac{m}{2} \leq H_{2^m} \leq 1 + m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Anmerkung: Die harmonischen Zahlen spielen unter anderem in der Kombinatorik eine wichtige Rolle. Eine schöne Eigenschaft der n-ten harmonischen Zahl ist, dass sie sehr gut durch den natürlichen Logarithmus approximiert wird (und umgekehrt). Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$. Durch die Approximation von H_n durch $\ln(n)$ lassen sich Terme, die eine harmonische Zahl enthalten, oft in einfacher zu handhabende Terme überführen, ohne dabei viel an Präzision einzubüßen.