Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 7
26. Mai 2014

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 4. Juni 2014, 10 Uhr in die* **DWT Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Wir werfen 2 faire Würfel. Die erhaltenen Augenzahlen seien $a$ und $b$. Dann sind die Ereignisse $a = b$ und $|a - b| = 1$ gleichwahrscheinlich.
2. 3 disjunkte Ereignisse sind stets unabhängig.
3. Falls $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable ist mit $\mathbb{E}[X^2] = 0$, dann gilt $X(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
4. Es gibt einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $W = (\Omega, \Pr)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, so dass alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.
5. Es gibt keine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 0.
6. Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt. Dann gilt $1 \leq \Pr[X = 0] + \mathbb{E}[X]$.
7. Es gibt keine Zufallsvariable $X$ mit wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion $G_X(s) = \frac{1}{1-s}$ .
8. Sei $G_X(s) = \frac{1+s}{2}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer Zufallsvariablen $X$. Dann gilt $\Pr[X = 2] = 0$.
9. Sei $X \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $(X + X) \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{2})$.
10. Die Summe zweier unabhängiger Indikatorvariablen $X$ und $Y$ ist binomialverteilt.

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable und $(X|X \geq t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die entsprechende bedingte Zufallsvariable mit Dichte $f_{X|X\geq t}(x) = \Pr[X = x \mid X \geq t]$. Wir nehmen stets $\Pr[X \geq t] \neq 0$ und die Existenz entsprechender Erwartungswerte an.

1. Zeigen Sie die folgende Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:

$$t \;\leq\; \mathbb{E}[X \mid X \geq t]\,.$$

2. Wir nehmen zusätzlich $\Pr[X < t] \neq 0$ an. Zeigen Sie mit Benutzung obiger Ungleichung die folgende Verschärfung der Markov-Ungleichung:

$$t \cdot \Pr[X \geq t] \;\leq\; \mathbb{E}[X] \;-\; \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t]\,.$$

3. Sei $X$ Poisson-verteilt mit Dichte $f_X$ und $f_X(0) = e^{-2}$ ($e$ ist die Eulersche Zahl). Beweisen Sie durch Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

$$\Pr[X \geq 12] \;\leq\; \frac{1}{50}\,.$$

## **Hausaufgabe 3** (5 Punkte)

Wir machen $n$ unabhängige Würfe mit je 3 fairen Würfeln. $Y$ sei die Summe aller gewürfelten Augen.

1. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $Y$!

2. Zeigen Sie, dass $Y$ mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $\frac{21}{2}n \pm 5\sqrt{35n}$ liegt.

## **Hausaufgabe 4** (5 Punkte)

1. Geben Sie ein Beispiel für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ und zwei unabhängige geometrisch verteilte diskrete Zufallsvariable $X$ und $Y$ über $(\Omega, \Pr)$ an.

   Begründen Sie Ihre Konstruktion.

2. Sei $F(z)$ bzw. $G(z)$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für eine Zufallsvariable $X_F$ bzw. $X_G$. Sei $H(z) = F(G(z))$.

   Berechnen Sie $H(1)$, $H'(1)$ und $H''(1)$ in Abhängigkeit ggf. von $\mathbb{E}[X_F]$, $\mathrm{Var}[X_F]$, $\mathbb{E}[X_G]$ und $\mathrm{Var}[X_G]$.

## **Zusatzaufgabe 3** (Wiederholung des Ballot-Problems)

Peter und Paul spielen ein Spiel mit $n$ Runden, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Runde gewinnt, während der Andere gleichzeitig verliert. Der Gewinner einer Runde erhält vom Verlierer einen Euro. Aus Gründen der Fairness sei $n$ geradzahlig. Nach jeder Runde bestimmt Peter seinen summarischen Spielerfolg, so dass der Gewinn positiv und der Verlust negativ bilanziert wird.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Peter nach Spielende einen Gewinn von genau 2 € verbuchen?

2. Angenommen wir wissen, dass Peter bei Spielende 2 € Gewinn gemacht hat. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Peter nach jeder Runde den Gesamtgewinn positiv bilanzieren konnte.

***Hinweis:*** *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

# Vorbereitung 1

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

# Vorbereitung 2

Seien $A$, $B$ und $C$ jeweils (unabhängig) gleichverteilt über $[0, 1]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A{\cdot}C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

# Vorbereitung 3

Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Menge $\Omega^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen der Menge $\Omega$ und definieren für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ die Mengen $A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$. Dabei bedeutet $\omega_i$ das $i$-te Folgenelement der Folge $\omega$. Sei $\mathcal{E} = \{A_{i,e}\,;\, i \in \mathbb{N}, e \in \Omega\}$.

Man zeige:

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{\mathbb{N}}, \sigma_{\Omega^{\mathbb{N}}}(\mathcal{E}), \Pr_{\mathbb{N}})$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ gilt

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}] = \Pr[e]\,.$$

## Tutoraufgabe 1

Peter und Paul spielen ein Spiel mit $n$ Runden, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Runde gewinnt, während der Andere gleichzeitig verliert. Der Gewinner einer Runde erhält vom Verlierer einen Euro. Aus Gründen der Fairness sei $n$ geradzahlig. Nach jeder Runde bestimmen Peter und Paul ihren summarischen Spielerfolg, so dass jeder seinen Gewinn positiv und den Verlust negativ bilanziert.

Angenommen wir wissen, dass Paul am Spielende 100 € Gewinn gemacht hat.

Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Peter nach keiner Runde einen Gewinn von 50 € bilanzieren konnte.

## Tutoraufgabe 2

1. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

2. Ein Krankenhaus steht in einer Straße der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

   Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

## Tutoraufgabe 3

1. Seien $X$ und $Y$ unabhängige und positivwertige kontinuierliche Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion $f_Z$ von $Z = X/Y$ durch die Dichtefunktionen $f_X$ und $f_Y$ von $X$ bzw. $Y$ aus.

2. Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ seien gegeben durch die Koordinaten eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in \{(s,t); s^2 + t^2 \leq 4\}$ der $x,y$-Ebene.

   Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ !

   Sind $X$ und $Y$ unabhängig? Begründung!

   Berechnen Sie die Randdichten $f_X$ und $f_Y$ !