Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 13
21. Januar 2013

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 29. Januar 2013, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Zu einer Party kommen n Gäste. Es bilden sich Gruppen, in denen die Gäste im Kreis stehen. Jede Gruppe besteht aus mindestens einem Gast und es bilden sich k Gruppen. Wenn in einer Gruppe mehr als zwei Gäste stehen, dann hat jeder Gast einen linken und einen rechten Gesprächspartner. Zwei Gruppenverteilungen werden als gleich angesehen, wenn jeder Gast die gleichen Nachbarn hat, wobei es aber ein Unterschied sein soll, ob eine bestimmte Person ein linker oder rechter Nachbar einer anderen Person ist.

1. Wie viele Gruppenverteilungen gibt es, wenn der Gastgeber zunächst nicht dabei ist? Wie viele Gruppenverteilungen gibt es, wenn der Gastgeber nicht dabei ist und in jeder Gruppe mindestens 2 Gäste stehen.

2. Der Gastgeber schließt sich nun einer der k Gruppen an. Wie viele Gruppenverteilungen gibt es jetzt?

3. Wir nehmen an, dass ein Pärchen unter den Gästen ist, das auf jeden Fall nebeneinander sitzen bzw. stehen will. Wie viele Gruppenverteilungen gibt es jetzt bei k Gruppen (der Gastgeber sei nicht dabei)?

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für die folgenden Summen für $n \geq 1$ eine geschlossene Form mit Parameter n.

(i) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot 2^k$. (ii) $S_2 = \sum_{k=1}^{n} 9k4^k$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie durch Anwendung der Binomialinversion eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-n)^{\overline{k}} a_k \,.$$

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten die Rekursionsgleichung für Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+3} - 6f_{n+2} + 12f_{n+1} - 8f_n = 0\,, \quad \forall n \geq 0\,.$$

1. Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung in geschlossener Form für f_n in Abhängigkeit von geeigneten Parametern an.

2. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung, so dass gilt

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad (f_n)_{n\geq 0} \in \Theta(n2^n)\,.$$

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei die lineare Rekursion für Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n = 0\,, \quad \forall n \geq 0$$

mit variablen Anfangsbedingungen $f_0 = a, f_1 = b, f_2 = c$.

1. Bestimmen Sie mit Hilfe vollständiger Rekursion die erzeugende Funktion und die allgemeine Lösung der Rekursion in Abhängigkeit von a, b und c.

2. Bestimmen Sie die Werte von a, b und c, für die die Rekursion eine konstante Lösung besitzt, d. h. $f_n = \gamma$ für alle $n \geq 0$ in Abhängigkeit eines fest gewählten $\gamma \in \mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 6 (Für Interessierte)

Wir beziehen uns auf die Bezeichnungsweisen des Master-Theorems der Vorlesung.
Geben Sie eine nichtnegative Funktion $f(n)$ an, für die der genannte Satz nicht anwendbar ist. Begründung!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $(2, 1, 0)$. ii) $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$. iii) $(3, 3, 3, 2, 2, 2)$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Vorbereitung 2

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v.
   Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

Vorbereitung 3

1. Gegeben seien die Bäume

   $B_1 = ([9], \{\{1, 9\}, \{2, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\})$,
   $B_2 = ([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 3\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\})$.

   Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

   i) $(6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$, ii) $(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$, iii) $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

Tutoraufgabe 1

Es sei $G = (V, E)$ ein nichtleerer Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.
2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.
3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Tutoraufgabe 2

1. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen $B_1 = (U_1, U_2, E)$ und $B_2 = (V_1, V_2, E)$, so dass $U_1 \neq V_1$, $U_1 \neq V_2$ gilt.

   Zeigen Sie, dass G zwei verschiedene Komponenten besitzt.
2. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$. Beweis!

Tutoraufgabe 3

Eine Brücke in einem zusammenhängenden einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, so dass $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Man zeige:

1. Ein Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält keine Brücke.
2. Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

Tutoraufgabe 4

Wir betrachten Bäume $T = (V, E)$.

1. Bestimmen Sie den Prüfer-Code des folgenden Baumes mit Knoten $V = [7]$ und Kanten $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$.
2. Geben Sie zeichnerisch (und übersichtlich, mit Knotenmarkierung) den Baum an, der durch den Prüfer-Code $(9, 8, 9, 6, 3, 4, 3, 2)$ dargestellt wird.