Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 3
29. Oktober 2012

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 6. November 2012, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe von Arbeitsblatt 2 die folgenden Aufgaben zur Eulerschen e-Funktion.

1. Zeigen Sie zunächst für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1+x)^n \leq e^{nx}$ und leiten Sie daraus die folgende Aussage ab: Für alle $x \geq -n$ gilt
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \,.$$

2. Die Polynome $p_n(x) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$ „nähern“ sich für wachsendes n der e-Funktion, wenn man x festhält.

   Machen Sie diesen Sachverhalt graphisch deutlich, indem Sie z. B. mit Maple die e-Funktion und für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ die Polynome $p_n(x) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$ in einem geeigneten Bereich für x graphisch darstellen.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Seien A und B Mengen. Man zeige:

1. Die Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$ sind paarweise disjunkt und es gelten die Gleichungen
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B)\,.$$

2. Falls A und B endlich sind, dann gilt die Implikation
$$|A \setminus B| \leq |A| - |B| \quad \Longrightarrow \quad B \subseteq A\,.$$

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Zeigen oder widerlegen Sie, dass für beliebige binäre Relationen $R, S, T \subseteq M \times M$ über einer Menge M das folgende Distributivgesetz gilt:
$$R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T).$$

2. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über den ganzen Zahlen sei gegeben durch
$$(x, y) \in R \;:\Leftrightarrow y = 1 - x.$$

   Berechnen Sie R^{17}!
   Ist R antisymmetrisch? Begründung! Ist R^2 eine Äquivalenzrelation? Begründung!
   Ist die reflexive Hülle von R transitiv? Begründung!

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Den folgenden aussagenlogischen Ausdruck bezeichnen wir mit F:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r\,.$$

Bestimmen Sie die Semantik von F als boolesche Funktion (Wahrheitsfunktion) durch Angabe der zugehörigen Wahrheitswerttabelle.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M_n = [n] \times [n]$. Wir bezeichnen M_n als die Menge der Gitterpunkte mit ganzahligen Komponenten aus $[n]$. Wir definieren über M_n eine binäre Relation G_n zwischen „benachbarten“ Gitterpunkten durch $G_n = H_n \cup V_n$ mit

$$\begin{aligned} H_n &= \{\, (\,(x,y),(x{+}1,y)\,)\ ;\ x\in[n{-}1],\ y\in[n]\,\} \quad \text{(horizontal benachbart)}\,,\\ V_n &= \{\, (\,(x,y),(x,y{+}1)\,)\ ;\ x\in[n],\ y\in[n{-}1]\,\} \quad \text{(vertikal benachbart)}\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der transitiven Hülle von G_3.
   Begründen Sie Ihr Ergebnis!
2. Wir betrachten die Komposition $G_3^3 = (G_3 \circ G_3) \circ G_3$ der Relation G_3.

   Wie viele Elemente enthält G_3^3? Begründung!

   Geben Sie ein Hasse-Diagramm der reflexiven transitiven Hülle von G_3^3 an! Begründung!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, so dass F und $\neg F$ erfüllbar ist!
2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!

Vorbereitung 2

Eine disjunktive bzw. konjunktive Normalform eines aussagenlogischen Ausdrucks ist im Sinne der Vorlesung eine Disjunktion von Vollkonjunktionen bzw. eine Konjunktion von Volldisjunktionen.

1. Leiten Sie eine disjunktive Normalform im Sinne der Vorlesung für die folgende Formel F_1 her:
   $$F_1 :=\ \neg p \vee (p \wedge q \wedge r)\,.$$
2. Leiten Sie durch äquivalente Umformung eine konjunktive Normalform im Sinne der Vorlesung für die folgende Formel F_2 her:
   $$F_2 := (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)\,.$$

Vorbereitung 3

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Wir nehmen an, dass für einstellige Prädikate P und Q die folgende Aussage gilt:

$$(\exists x)[P(x)] \;\; \wedge \;\; (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

2. Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

$$(\forall x \; \exists y \; \forall z) \, [P(x, y, z)] \, .$$

   Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die zu $\neg F$ äquivalent ist.

Vorbereitung 4

1. Direkter Beweis:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \frac{1}{n+m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b \right) .$$

2. Indirekter Beweis:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie: Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k + 1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k + 1$ Hamster befinden.

3. Schubfachprinzip:
   Lassen sich obige Aussagen auch mit dem „Schubfachprinizip“ beweisen?

Tutoraufgabe 1

Wir untersuchen die aussagenlogischen Normalformen für den folgenden aussagenlogischen Ausdruck F aus TA 3.3 von Blatt 2:

$$F := \; ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r)\,.$$

1. Bestimmen Sie die konjunktive Normalform von F im Sinne der Vorlesung.

2. Bestimmen Sie die disjunktive Normalform von F im Sinne der Vorlesung.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln für Prädikate über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgenden Aussagen gelten:

   $$(\forall x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

2. Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgenden Aussagen gelten:

   $$(\exists x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann nicht notwendigerweise $(\exists x)[Q(x)]$ gilt.

3. Für Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ wird $f(n) \in \omega(g(n))$ wie folgt definiert:

   $$f(n) \in \omega(g(n)) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall c > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0)\, [\, |f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,]\,.$$

   Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel für die Aussage $f(n) \notin \omega(g(n))$ her und zeige die Erfüllbarkeit der erhaltenen Formel mit einem Beispiel.

Tutoraufgabe 3

1. Widerspruchsbeweis:
   Sei S eine endliche Menge und $f : S \to S$. Man zeige durch Widerspruchsbeweis die Implikation

   $$f \text{ surjektiv} \implies f \text{ injektiv}\,.$$

2. Schubfachprinzip:
   Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

   Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 3 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.