
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 30. Oktober 2012, 14 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen und der Ergebnisse aus Hausaufgabe 4 von Blatt 1:

1. Sei x eine ganze Zahl. Falls sowohl x als auch $x + 1$ nicht gerade sind, dann ist auch $x + 2$ nicht gerade. Begründung!
Falls sowohl x als auch $x + 1$ nicht gerade sind, dann sind auch alle ganzen Zahlen y mit $x \leq y$ nicht gerade. Begründung!
Man zeige nun: Für jede ganze Zahl x ist mindestens eine der Zahlen x und $x + 1$ gerade.
2. Jede ganze Zahl x , die nicht gerade ist, ist ungerade.
3. Jede ganze Zahl x , die ungerade ist, ist nicht gerade.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen.

1. Sei $x \in \mathbb{N}$, d. h. eine positive ganze Zahl, und $y = x + 10$. Dann sind die Zahlen 4 und 20 keine gemeinsamen Teiler von x und y .
Ist 5 notwendigerweise ein gemeinsamer Teiler von x und y ? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Bestimmen Sie die Menge der gemeinsamen Teiler von 220 und 235 in extensionaler Schreibweise (Auflistung). Welches ist der größte gemeinsame Teiler von 220 und 235, d. h. $ggT(220, 235)$?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Es seien zwei reelle Zahlen a und b durch ihre Darstellung $g_a, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$ für a bzw. $g_b, b_1 b_2 b_3 \dots b_n b_{n+1} \dots$ für b als unendlicher Dezimalbruch gegeben (siehe Arbeitsblatt 1).
Wir nehmen an, dass $a_{101} + b_{101} > 9$ gilt.
Geben Sie ein Verfahren an zur Berechnung der ersten 100 Dezimalstellen c_i nach dem Komma der Darstellung der Summe $c = a + b$ als unendlicher Dezimalbruch $g_c, c_1 c_2 c_3 \dots c_n c_{n+1} \dots$.
2. Zeigen Sie, dass jeder periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl darstellt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Wie viele Elemente enthält die Menge aller in dem Wort 'simplicissimus' vorkommenden Buchstaben? Wie viele Vorkommen von Buchstaben enthält das Wort 'simplicissimus'?
2. Gegeben seien $A = \{x, b, 35, \epsilon\}$, $B = \{x, b, 2, 3, \delta, x\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, x\}$. Wir definieren $D = B \cup (A \cap C)$, $E = D \cap (A \cup B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup C)$. Berechnen Sie eine extensionale (d. h. auflistende) Darstellung von G .
3. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A = \{\{1, x\}, \{x, y\}, y\}$. Wie viele Elemente besitzt die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$?

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche \leq -Ordnung der Zahlen [6]. Wie ergibt sich die \leq -Ordnung auf [6] aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?
2. Wir entfernen das Paar $(3, 4)$ aus der Relation \leq auf \mathbb{N} . Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!
3. Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation \subseteq auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Vorbereitung 2

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$? Begründung!
2. Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$? Begründung!
3. Gilt für $f : X \rightarrow Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$? Begründung!

Vorbereitung 3

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen x, y, z als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y).$$

Vorbereitung 4

Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem allgemeinen Venn-Diagramm für drei Mengen A, B und C einerseits und andererseits der Menge der Vollkonjunktionen für drei Aussagenvariablen p, q, r ?

Tutoraufgabe 1

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y) ; y = x + 5\}$. Geben Sie R^* an!
3. Sei $M = [3]$. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen R über M . Zeichnen Sie jeweils ein Hasse-Diagramm der Relationen und geben Sie an, welche der aufgelisteten Relationen total sind.

Tutoraufgabe 2

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, so dass $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$ gilt.
2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!
3. Zeigen Sie, dass für die Komposition \circ zweier Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv (auf C), dann ist f injektiv und g surjektiv (auf C).

Tutoraufgabe 3

Seien p, q, r Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Zeigen Sie, dass $\neg p \vee q \neg$ keine Aussagenlogische Formel ist.
2. Wie viele boolesche Funktionen $f(p, q)$ gibt es, so dass der Ausdruck $f(\text{true}, q)$ für alle Belegungen stets wahr ist?
3. Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r).$$