Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Mittelklausur
15. Dezember 2012

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 150 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen. Dann gilt $[0]_1 = \{0\}$, d. h., die Restklasse von 0 modulo 1 ist gleich der Menge $\{0\}$.
2. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $(k \bmod 7) \bmod 5 = (k \bmod 5) \bmod 7$.
3. $(\mathbb{Z}_4^*, \cdot)$ ist eine Unteralgebra des multiplikativen Monoids $(\mathbb{Z}, \cdot)$.
4. Jede Gruppe G mit $\mathrm{ord}(G) = |G| = 11$ ist kommutativ.
5. Sei $M = \{a, b\}$ mit $|M| = 2$. Jede reflexive Relation $R \subseteq M^2$ ist transitiv.
6. Für aussagenlogische Formeln F gilt: Falls F erfüllbar ist, dann ist $\neg F$ **nicht** erfüllbar.
7. Jeder kommutative nullteilerfreie Ring ist ein Körper.
8. Streit unter berühmten Mathematikern: C.F. Gauß bewies, dass L. Euler von ihm abgeschrieben hatte.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

1. Widerlegen Sie die folgende Behauptung:

   Für alle Mengen A, B, C gilt: $\quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)\,.$

2. Beweisen Sie die folgende Behauptung:

   Für alle Mengen A, B, C gilt: $\quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)\,.$

3. Bestimmen Sie die (vollständige) disjunktive Normalform des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks mit aussagenlogischen Variablen a, b, c:

$$a \wedge \neg(b \wedge \neg c)\,.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Wir betrachten binäre Relationen $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über ganzen Zahlen und benutzen die Schreibweise xRy bzw. $\neg xRy$ für $(x,y) \in R$ bzw. $(x,y) \notin R$. Dann heißt $x \in \mathbb{Z}$ ein Randpunkt bezüglich R, falls gilt

$$(\forall y \in \mathbb{Z})[(y,x) \notin R] \ \vee \ (\forall z \in \mathbb{Z})[(x,z) \notin R]\,. \tag{1}$$

1. Man zeige: x ist genau dann **kein** Randpunkt bezüglich R, wenn gilt

$$(\exists y \in \mathbb{Z})[yRx] \ \wedge \ (\exists z \in \mathbb{Z})[xRz]\,. \tag{2}$$

2. Sei R die Vergleichsrelation $\leq$ über $\mathbb{Z}$ ($0 \leq 1$, aber $1 \not\leq 0$). Beweisen Sie, dass es keine Randpunkte bezgl. R, d.h. bezgl. $\leq$, gibt.

3. Sei R eine beliebige Relation über $\mathbb{Z}$. Man zeige:

   Falls $x \in \mathbb{Z}$ ein Randpunkt bezgl. R ist, dann ist x auch Randpunkt bezgl. R^2.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, die für $n = 0$ bzw. $n = 1$ die Werte $f(0) = 2$ bzw. $f(1) = 2$ annimmt und für alle $n \geq 1$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$f(n+1) = 5 \cdot f(n) \; - \; 6 \cdot f(n-1)\,.$$

1. Man zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung $G(n)$:

$$f(n) = 2^{n+2} - 2 \cdot 3^n\,. \tag{1}$$

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: $f(n) \in \mathcal{O}(e^n)$.

   Hinweis: $e = 2{,}71\ldots$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei $(S_8, \circ)$ die Symmetrische Gruppe aller Permutationen der Teilmenge $[8] = \{1, 2, \ldots, 8\}$ der natürlichen Zahlen. Seien $p, q \in S_8$ wie folgt gegeben:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Ordnung von q.
2. Bestimmen Sie die Darstellung der Permutation $(p \circ q)(x) = p(q(x))$ als Komposition disjunkter Zyklen.
3. Besitzt S_8 eine Untergruppe der Ordnung 13? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis: Es gilt $|S_8| = 8! = \prod_{k=1}^{8} k$.
4. Beweisen Sie, dass die Gruppe $(S_8, \circ)$ nicht zyklisch ist.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Im Folgenden sei $n = 4851$.

1. Sei $R = (\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ der Ring der ganzen Zahlen modulo n.

   Besitzt 39 ein multiplikatives Inverses in R? Beweisen Sie Ihre Antwort!

2. Sei G die multiplikative Gruppe $(Z_n^*, +_n, \cdot_n)$ mit
   $Z_n^* = \{x \in \mathbb{N}\,;\, x < 4851 \text{ und } \operatorname{ggT}(4851, x) = 1\}$.

   Berechnen Sie das multiplikative Inverse von 221 in G.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Seien $a(x)$ und $b(x)$ die folgenden Polynome über dem Körper $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} a(x) &= x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1\,, \\ b(x) &= 2x^3 - x^2 - 1\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $q, r \in \mathbb{Z}_3[x]$ mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(b)$. so dass gilt:

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)\,.$$

2. Bestimmen Sie ein Polynom $t \in \mathbb{Z}_3[x]$ höchsten Grades, das sowohl Teiler von a als auch Teiler von b ist.
