Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 4
7. November 2011

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 15. November 2011, 12 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien nichtleere endliche Mengen X und Y. Man zeige bzw. berechne:
Es existiert genau ein i mit $0 \leq i \leq |Y| - 1$, so dass $\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil = \frac{|X|+i}{|Y|}$.
Geben Sie ein Verfahren zur Berechnung von i an, das die ganzzahlige Division geeignet verwendet.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Man zeige:

1. Es gibt genau 16 binäre Relationen über der Menge $\{0, 1\}$. Beweis!

   Wie viele davon sind linkseindeutig und gleichzeitig rechtstotal?

2. Es gibt genau 5 Äquivalenzrelationen über der Menge $[2, 4]$ natürlicher Zahlen. (Definitionsgemäß gilt $[m, n] = \{x \in \mathbb{N}\,;\, m \leq x \leq n\}$.)

3. Sei M eine nicht leere Menge und R eine symmetrische Relation $R \subseteq M \times M$. Dann ist die reflexive transitive Hülle R^* eine Äquivalenzrelation.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ ;\ x + 2y \geq 12\}$. Wir definieren eine binäre Relation R über M, d. h. $R \subseteq M \times M$, wie folgt: $((x, y), (x', y')) \in R \ :\Leftrightarrow\ x \leq x' \wedge y \leq y'$.

1. Ist R reflexiv, symmetrisch, transitiv? Ist R eine partielle Ordnung über M? Ist R total (a.a. vollständig oder linear)? Begründung!

2. Ein Element $x \in M$ heißt minimal bezüglich R, wenn es kein Element $y \in M$ gibt mit $y \neq x$ und $(y, x) \in R$. Wie viele minimale Elemente bezüglich R gibt es? Begründung!

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Den folgenden aussagenlogischen Ausdruck bezeichnen wir mit F:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r\ .$$

1. Bestimmen Sie die Semantik von F als boolesche Funktion (Wahrheitsfunktion) durch Angabe der zugehörigen Wahrheitswerttabelle.

2. Ist F allgemeingültig? Begründung!

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Für die Eulersche e-Funktion gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ und die Ungleichung $x + 1 \leq e^x$.

1. Für jede positive reelle Zahl a gibt es genau eine Funktion $(a^x) : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, die die Eigenschaften $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ erfüllt. Beweis!

   Bemerkung: a^x besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$.

2. Zeigen Sie unter der Annahme der o. g. Eigenschaften der Eulerschen e-Funktion zunächst für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1 + x)^n \leq e^{nx}$ und leiten Sie daraus die folgende Aussage ab:

   Für alle $x \geq -n$ gilt
   $$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x .$$

   Bemerkung: Tatsächlich gibt es eine und nur eine Funktion, die die o. g. Eigenschaften erfüllt. Diese Funktion ist sogar stetig.

3. ***Zusatzaufgabe*** (0 Punkte): Die Polynome $p(x) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$ nähern sich für wachsendes n der e-Funktion.

   Machen Sie diesen Sachverhalt graphisch deutlich, indem Sie mit Maple die e-Funktion und für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ die Polynome $p(x) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$ in einem geeigneten Bereich für x graphisch darstellen.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Eine disjunktive bzw. konjunktive Normalform eines aussagenlogischen Ausdrucks ist im Sinne der Vorlesung eine Disjunktion von Vollkonjunktionen bzw. eine Konjunktion von Volldisjunktionen.

1. Leiten Sie durch äquivalente Umformung eine disjunktive Normalform im Sinne der Vorlesung für die folgende Formel F_1 her:
   $$F_1 := \neg p \vee (p \wedge q \wedge r) .$$

2. Leiten Sie durch äquivalente Umformung eine konjunktive Normalform im Sinne der Vorlesung für die folgende Formel F_2 her:
   $$F_2 := (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) .$$

Vorbereitung 2

Im Folgenden bezeichnet 1 in $o(1)$ die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:
$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$

2. Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1)\,.$$

Vorbereitung 3

1. Man zeige: $(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})$.

2. Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$.
   Man zeige $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$.

Vorbereitung 4

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z. $a \equiv b \pmod m$ oder $a \equiv_m b$, falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheiden, d. h., falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $a = b + k\cdot m$ gilt. Diesen Zusammenhang kann man der Definition der Operation $\bmod : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zugrunde legen: $b = a \bmod m$ gilt genau dann, wenn $a \equiv b \pmod m$ und gleichzeitig $0 \le b < m$ gilt.
Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv a \bmod m \pmod m\,, \tag{1}$$
$$(a+b) \bmod m = [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,, \tag{2}$$
$$(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,. \tag{3}$$

In enger Beziehung zur mod-Operation steht die ganzzahlige Division $a \div m$ zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Es gilt
$$a = (a \div m)\cdot m + (a \bmod m)\,.$$
Berechnen Sie: (i) $5 \div 4$, (ii) $(-5) \div 4$, (iii) $(-x) \div 1$.

Vorbereitung 5

Seien $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und für alle $x, y \in S$
$$x \circ y = x + y + xy\,.$$

Zeigen Sie, dass die Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ bezüglich des binären Operators $\circ$ eine Gruppe bildet.

Tutoraufgabe 1

Wir untersuchen die aussagenlogischen Normalformen für den folgenden aussagenlogischen Ausdruck F aus TA 3.3 von Blatt 2:

$$F := \ ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r)\,.$$

1. Bestimmen Sie die konjunktive Normalform von F im Sinne der Vorlesung.
2. Bestimmen Sie die disjunktive Normalform von F im Sinne der Vorlesung.
3. Zeigen Sie durch äquivalente Umformung von F die Gültigkeit der Formeln

$$F \equiv (\neg p \vee (p \wedge q \wedge r)) \quad \text{und} \quad F \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)\,.$$

Tutoraufgabe 2

1. Für die reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 2^n$ und $g(n) = n^2$ gilt $f(n) \notin o(g(n))$, d. h. $(\exists c > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [|f(n)| \geq c \cdot g(n)]$.

   Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für $c = 5$ die folgende Aussage nachweisen:

$$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [2^n \geq 5 \cdot n^2]\,.$$

2. Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen und g habe höchstens endlich viele Nullstellen. Zeigen Sie:

$$f(n) \in o(|g(n)|) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0\,.$$

Tutoraufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen so an, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$ oder $f(n) \in O(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung. Benutzen Sie ggf. die Monotonieeigenschaften elementarer Funktionen ohne Beweis.

$$f_1(n) = 2^{\ln n}\,, \qquad f_2(n) = \sqrt{n^2}\,,$$
$$f_3(n) = (\ln n)^{\ln n}\,, \qquad f_4(n) = (\log n^2)^2\,.$$

Tutoraufgabe 4

Es sei $G = \langle S, \circ, e\rangle$ eine Gruppe mit genau 4 Elementen $e, a, b, c \in S$, in der speziell für a gilt $a^2 = e$ mit dem neutralen Element e.

1. Geben Sie zwei verschiedene Gruppen mit obiger Eigenschaft an, indem Sie die zugehörigen Verknüpfungstabellen konstruieren.
2. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gruppen mit obiger Eigenschaft gibt.
3. Wir betrachten jetzt **beliebige** Gruppen mit 4 Elementen.

   Zeigen Sie elementar, dass es in diesen stets ein Element mit Ordnung 2 gibt.