Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 3
31. Oktober 2011

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 8. November 2011, 12 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

1. Man zeige direkt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$: $\frac{2^n}{n^2} < \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$.
2. Sei c eine beliebige positive reelle Zahl. Man zeige:
   Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $n^2 < c \cdot 2^n$.
3. Man zeige:
   Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $n^{\mathrm{ld}\, n} < (\mathrm{ld}\, n)^n$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Für beliebige Mengen A, B und C gilt die Gleichung

$$(B \cup (A \cap C)) \cap (A \cap B) = A \cap B\,.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Menge der Kubikzahlen n^3 für $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig ist wie die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Konstruieren Sie in Ihrem Beweis eine entsprechende Bijektion.
2. Sei $V = \{a + b\sqrt{3}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung von V in $\mathbb{N}$ gibt.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

1. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über den ganzen Zahlen sei gegeben durch

   $$(x, y) \in R \ :\Leftrightarrow y = 1 - x.$$

   Berechnen Sie $R^2 = R \circ R$!
   Ist die reflexive Hülle von R transitiv? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass für beliebige binäre Relationen $R, S, T \subseteq M \times M$ über einer Menge M das folgende Distributivgesetz gilt.

   $$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei die Menge (das Alphabet) $\Sigma = \{d, e, f\}$ mit Zeichen d, e und f gegeben, und es sei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ. Untersuchen Sie die Teilwortrelation $\sqsubseteq\ \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq \ := \ \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \ ; \ (\exists y_1, y_2 \in \Sigma^*)\ [y = y_1 x y_2]\}.$$

Dabei bedeutet $y_1 x y_2$ das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter y_1, x und y_2 entsteht. Es gilt beispielsweise $ed \sqsubseteq ffdede$, aber $fe \not\sqsubseteq ffdede$. Beachten Sie, dass Σ^* auch das sogenannte leere Wort ε enthält, das als das Wort ohne Buchstaben definiert ist.

1. Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $\sqsubseteq$ zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.
2. Sei $B := \{x \in \Sigma^* \ ; \ x \sqsubseteq dedf\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq \ \cap (B \times B)$.

Zusatzaufgabe

Ein Tourist in einem bayrischen Dorf kommt zu einer Weggabelung. Der Tourist weiß nicht, welcher der beiden Zweige der Gabelung zu einem Gasthof führt, zu dem er gelangen möchte. Er weiß aber, dass die Einheimischen entweder stets lügen oder stets die Wahrheit sagen. Glücklicherweise steht an der Gabelung ein Einheimischer, der den Weg zum Gasthof kennt.

Welche Frage muss der Tourist an den Einheimischen stellen, um aus dessen Antwort den richtigen Weg zu erfahren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Wir nehmen an, dass für einstellige Prädikate P und Q die folgende Aussage gilt:

   $$(\exists x)[P(x)] \ \wedge \ (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.
2. Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

   $$(\forall x\ \exists y\ \forall z)\,[P(x, y, z)]\,.$$

   Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die zu $\neg F$ äquivalent ist.

Vorbereitung 2

1. Direkter Beweis:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right).$$

2. Indirekter Beweis:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie: Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k+1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k+1$ Hamster befinden.

3. Schubfachprinzip:
   Lassen sich obige Aussagen auch mit dem „Schubfachprinizip“ beweisen?

Vorbereitung 3

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen. Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)] \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt, stattdessen die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]\,. \tag{2}$$

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
...

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Dann gilt $P(n+1)$:
...

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$ die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m\,.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an und führen Sie den Induktionsbeweis für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$ nach dem angegebenen Schema durch.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln für Prädikate über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgenden Aussagen gelten:

   $$(\forall x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

2. Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgenden Aussagen gelten:

   $$(\exists x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\exists x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann nicht notwendigerweise $(\exists x)[Q(x)]$ gilt.

3. Für Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ wird $f(n) \in \omega(g(n))$ wie folgt definiert:

   $$f(n) \in \omega(g(n)) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall c > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0)\,[\,|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,]\,.$$

   Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel für die Aussage $f(n) \notin \omega(g(n))$ her und zeige die Erfüllbarkeit der erhaltenen Formel mit einem Beispiel.

Tutoraufgabe 2

1. Widerspruchsbeweis:
   Sei S eine endliche Menge und $f : S \to S$. Man zeige durch Widerspruchsbeweis die Implikation

   $$f \text{ surjektiv} \implies f \text{ injektiv}\,.$$

2. Schubfachprinzip:
   Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

   Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 3 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.

Tutoraufgabe 3

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die für $n = 0$ bzw. $n = 1$ die Werte $f(0) = 1$ bzw. $f(1) = 4$ annimmt und für alle $n \geq 1$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$f(n+1) = 4 \cdot (f(n) - f(n-1))\,.$$

Man zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(n) = (n+1) \cdot 2^n\,.$$