Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 3
16. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 24. Mai 2011, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei T eine nicht leere Menge von n Tieren. T bestehe aus genau a Ochsen und b Eseln, so dass also $a+b=n$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von $r \neq 0$ ausgewählten Tieren genau x Tiere Ochsen sind, ist gegeben durch

$$\Pr[x] = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{r-x}}{\binom{n}{r}} .$$

Sei nun $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, r\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse E bezeichnen wir $\Omega \setminus E$ mit $\overline{E}$.

1. Wir beobachten Ereignisse A und B und wissen, dass A mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[A] = \frac{1}{10}$ eintritt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A bzw. $\overline{A}$ eingetreten ist, sei $\Pr[B|A] = \frac{5}{9}$ bzw. $\Pr[B|\overline{A}] = \frac{1}{9}$.

   Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt, als Bruchzahl!

2. Seien C und X Ereignisse aus W mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[C|X] = \frac{2}{9}$, $\Pr[X|C] = \frac{1}{10}$ und $\Pr[C|\overline{X}] = \frac{2}{3}$.

   Berechnen Sie $\Pr[X]$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\Pr[\omega] \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Kann es in W zwei verschiedene, unabhängige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ geben, für die $|A| = |B| = 2$ gilt? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir gehen aus von einem Zufallsexperiment mit Ereignissen aus einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \Pr \rangle$, bei dessen Ausführung stets mindestens eines von 3 bestimmten Ereignissen $A, B, C \subseteq \Omega$ eintritt. A und B seien unabhängige Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$. Es sei C disjunkt zu A und B.

1. Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$ und $\Pr[C]$!

2. Geben Sie ein konkretes Beispiel für $\langle \Omega, \Pr \rangle$ an.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* <u>*Vorbereitungsaufgabe*</u>*,* <u>*Tutoraufgabe*</u> *und* <u>*Hausaufgabe*</u> *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.
2. $Y :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.
3. $Z :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide `O` gezogen wurden.

Vorbereitung 2

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ einmal vorgekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariablen X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$!

Vorbereitung 3

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2\cdot\mathrm{Var}[X] + 2\cdot\mathrm{Var}[Y]\,.$$
2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y)\cdot(X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y]\cdot\mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Tutoraufgabe 1

Sei $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$ mit $\Omega_n = \{a, b, c\}^n$, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass a bzw. b bzw. c in der i-ten Komponente von $w \in \Omega_n$ auftritt jeweils $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$ seien.
Wir betrachten die Zufallsvariablen $X_a, X_b, X_c : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, die einem Wort w entsprechend die Anzahl der enthaltenen a bzw. b bzw. c zuordnen.

1. Sind X_a, X_b, X_c unabhängig? Begründung!
2. Geben Sie die gemeinsame Dichte der Variablen X_a und X_b an!
   Geben Sie die entsprechenden Randdichten von X_a und X_b an!
3. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_c.

Tutoraufgabe 2

In einem Schützenverein haben Anfänger beim Tontaubenschießen nur eine Trefferquote von 10%.

1. Seien $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Anfänger bei k Schüssen genau i Treffer?
2. Wir wollen die Leistung von 100 Anfängern mit Noten bewerten. Note 2 bedeutet, dass der Schütze bei 2 Schüssen genau 1 Treffer erzielt. Nun lassen wir jeden der 100 Schützen (je) 2 Schussversuche machen und bezeichnen mit X die Anzahl der Schützen, die die Note 2 erhalten.

   Geben Sie die Dichtefunktion der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an! Berechnen Sie den Erwartungswert von X!

Tutoraufgabe 3

Angenommen eine Maschine gehe an jedem Betriebstag mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ kaputt.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine 10 Tage lang hintereinander störungsfrei arbeitet?
2. Wie groß ist die erwartete Anzahl k von hintereinander folgenden störungsfreien Tagen einer Maschine, unter der Annahme, dass die Maschine am Tag $k + 1$ defekt ist?