

7.1.1 Zusammenhang zwischen der w.e. Funktion und den Momenten

Da

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X],$$

gilt

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] = \mathbb{E}[X].$$

Beispiel 73

Sei X binomialverteilt mit $X \sim \text{Bin}(n, p)$, also

$$G_X(s) = (1 - p + ps)^n.$$

Dann gilt

$$G'_X(s) = n \cdot (1 - p + ps)^{n-1} \cdot p$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np.$$

Beispiel 73

Ebenso ergibt sich

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1),$$

also etwa

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2.\end{aligned}$$

Andere Momente von X kann man auf ähnliche Art und Weise berechnen.

Momenterzeugende Funktionen

Definition 74

Zu einer Zufallsvariablen X ist die **momenterzeugende Funktion** gemäß

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

definiert.

Es gilt

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Xs)^i}{i!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^i]}{i!} \cdot s^i$$

und

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}[(e^s)^X] = G_X(e^s).$$

7.2 Summen von Zufallsvariablen

Satz 75 (Erzeugende Funktion einer Summe)

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und die Zufallsvariable $Z := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$

Ebenso gilt

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(s).$$

Beweis:

Wegen der Unabhängigkeit von X_1, \dots, X_n gilt

$$G_Z(s) = \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_n}] = \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$



Beispiel 76

Seien X_1, \dots, X_k mit $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$ unabhängige Zufallsvariable und $Z := X_1 + \dots + X_k$. Dann gilt

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^k (1 - p + ps)^{n_i} = (1 - p + ps)^{\sum_{i=1}^k n_i}$$

und somit

$$Z \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$$

(vgl. Satz 56).

Seien $X_1, \dots, X_k \sim \text{Po}(\lambda)$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann folgt für $Z := X_1 + \dots + X_k$

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^k e^{\lambda(s-1)} = e^{k\lambda(s-1)}$$

und somit $Z \sim \text{Po}(k\lambda)$ (vgl. Satz 59).

7.2.1 Zufällige Summen

Wir betrachten die Situation, dass $Z := X_1 + \dots + X_N$, wobei N ebenfalls eine Zufallsvariable ist.

Satz 77

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_X(s)$. N sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_N(s)$. Dann besitzt die Zufallsvariable $Z := X_1 + \dots + X_N$ die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $W_N \subseteq \mathbb{N}_0$. Deshalb folgt mit Satz 36

$$\begin{aligned}G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^Z \mid N = n] \cdot \Pr[N = n] \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\&= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n \cdot \Pr[N = n] \\&= \mathbb{E}[(G_X(s))^N] \\&= G_N(G_X(s)).\end{aligned}$$

□

7.3 Rekurrente Ereignisse

Beispiel 78 (Random Walk im d -dimensionalen Gitter \mathbb{Z}^d)

Wir betrachten ein Partikel, das sich zufällig auf den Punkten aus \mathbb{Z} bewegt. Es starte im Punkt 0 und bewege sich in jedem Zeitschritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ vom Punkt i zum Punkt $i + 1$ („nach rechts“) bzw. $i - 1$ („nach links“). Man nennt dieses Experiment auch *Random Walk auf den ganzen Zahlen*. Abbildung 1 veranschaulicht diesen Prozess.

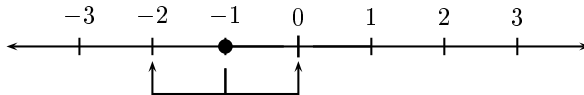


Abbildung: Random Walk auf den ganzen Zahlen

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne H_k das Ereignis $H_k :=$ „Partikel befindet sich im k -ten Schritt im Punkt 0“. Die Anzahl der Schritte nach rechts bzw. nach links bis zum k -ten Schritt ist **binomialverteilt** mit den Parametern $n = k$ und $p = 1/2$.

Für die Wahrscheinlichkeit $h_k := \Pr[H_k]$ erhalten wir deshalb

$$h_k = \binom{k}{k/2} 2^{-k},$$

falls k gerade ist und $h_k = 0$ sonst.

Verallgemeinerung auf \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$:

$$h_k = \left(\binom{k}{k/2} 2^{-k} \right)^d \text{ für } k \text{ gerade.}$$

Sei h'_k die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel im k -ten Schritt **zum ersten Mal** zum Punkt 0^d zurückkehrt, und sei $r := \sum_{k=1}^{\infty} h'_k$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel **irgendwann** zum Startpunkt zurückkehrt.

Wie hängt r von d ab?

Der gerade beschriebene Prozess hat die Eigenschaft, dass sich das Experiment nach jedem Besuch im Zustand 0 wieder genauso verhält wie beim Start des Prozesses im Zustand 0. Mit solchen Ereignissen beschäftigt sich die **Erneuerungstheorie** (engl. *renewal theory*).

Definition 79

Die Ereignisse H_1, H_2, \dots heißen **rekurrent**, wenn für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$ gilt, dass

$$\Pr[H_i \mid \bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j] = \Pr[H_{i-j}].$$

Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe die **Wartezeit** bis zum Auftreten des ersten Ereignisses H_k . Die Dichte von Z ist definiert durch

$$\Pr[Z = k] = \Pr[\bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k],$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k]$.

Definition 80

Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne $h_i := \Pr[H_i]$ die **Auftrittswahrscheinlichkeit** im i -ten Zeitschritt. Wir setzen $h_0 := 1$ und erhalten die **erzeugende Funktion der Auftrittswahrscheinlichkeiten** gemäß

$$H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k .$$

Ferner sei die **erzeugende Funktion der Wartezeit Z** gegeben durch

$$T(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k] \cdot s^k .$$

Bemerkung:

$H(s)$ ist keine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion im Sinne der Definition. So gilt i.a. **nicht** $H(1) = 1$. Auch $T(s)$ stellt keine „echte“ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion dar, da

$$\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Pr[Z = k] = 1 - T(1)$$

fehlt!

Satz 81

Für rekurrente Ereignisse gilt

$$H(s) = \frac{1}{1 - T(s)}.$$

Beweis:

[Skizze] Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für die Auftretswahrscheinlichkeit h_n ($n \in \mathbb{N}$)

$$h_n = \Pr[H_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[H_n \mid Z = k] \cdot \Pr[Z = k].$$

Gemäß der Definition eines rekurrenten Ereignisses gilt für $k < n$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = \Pr[H_n \mid \bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k] = \Pr[H_{n-k}]$$

Beweis (Forts.):

sowie

$$\Pr[H_n \mid Z = n] = 1$$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = 0 \text{ für } k > n.$$

Damit folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k] = \sum_{k=0}^n h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k].$$

Für $n = 0$ ergibt die rechte Seite dieser Gleichung 0. Damit entsteht durch Faltung der beiden Folgen (h_0, h_1, \dots) und $(\Pr[Z = 0], \Pr[Z = 1], \dots)$ die Folge $(0, h_1, h_2, \dots)$.

Für die erzeugenden Funktionen gilt deshalb $H(s) - 1 = H(s)T(s)$.

□

Beispiel 82

In dem einfachen Fall, dass die Ereignisse H_1, H_2, \dots unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p eintreten, ist die Wartezeit geometrisch verteilt.

$$H(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ps^k = 1 + \frac{sp}{1-s} = \frac{sp + 1 - s}{1-s}.$$

Daraus folgt

$$T(s) = 1 - \frac{1}{H(s)} = 1 - \frac{1-s}{sp + 1 - s} = \frac{sp}{1 - (1-p)s}.$$

$T(s)$ ist also die w.e. Funktion der geometrischen Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p .

Korollar 83

Für rekurrente Ereignisse gilt $\Pr[Z < \infty] = 1$ genau dann, wenn $H(1) = \infty$ ist, wenn also die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ der Auftrittswahrscheinlichkeiten divergiert.

Beweis:

Nach Satz 81 gilt $T(s) = (H(s) - 1)/H(s)$. Daraus folgt

$$\Pr[Z < \infty] = T(1) = 1 - 1/H(1).$$



Beispiel 84

Wir wenden Korollar 83 auf den Random Walk im \mathbb{Z}^d an.

Aus der Stirlingformel folgt

$$n! = \Theta(\sqrt{n}(n/e)^n)$$

und damit für $d = 1$

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta\left(\frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(\frac{e^n}{\sqrt{nn^n}}\right)^2\right) \\ &= \Theta\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

Also

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-1/2}) = \infty,$$

da die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k^\alpha$ für $\alpha \leq 1$ divergiert. Nach Korollar 83 kehrt das Partikel also mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zum Ausgangspunkt zurück.

Beispiel (Forts.)

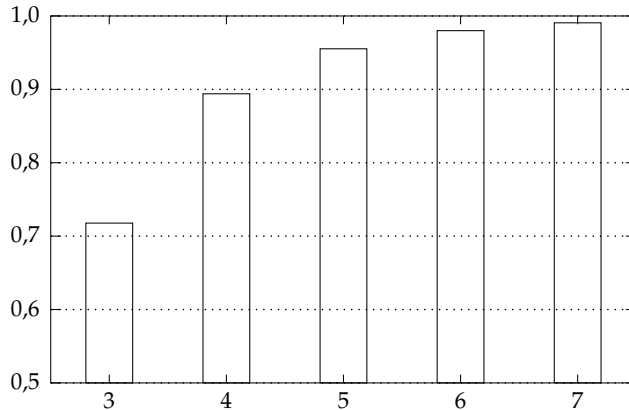
Für $d \in \mathbb{N}$ gilt allgemein

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-(1/2)d}).$$

Für $d = 1$ und $d = 2$ divergiert diese Summe, während sie für $d \geq 3$ konvergiert. Das Partikel kehrt also im ein- und im zweidimensionalen Raum mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausgangspunkt zurück, im drei- oder höherdimensionalen Raum jedoch nicht mehr. Im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{„Partikel kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück“}] \\ &= \Pr[Z = \infty] = 1/H(1) = 1 / \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \\ &\approx 0,7178. \end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)



WS(„Keine Rückkehr zum Anfang“) für den Random Walk in \mathbb{Z}^d

8. Formelsammlung

8.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden seien A und B , sowie A_1, \dots, A_n Ereignisse. Die Notation $A \uplus B$ steht für $A \cup B$ und zugleich $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung). $A_1 \uplus \dots \uplus A_n = \Omega$ bedeutet also, dass die Ereignisse A_1, \dots, A_n eine Partition der Ergebnismenge Ω bilden.

$$\Pr[\emptyset] = 0$$

$$0 \leq \Pr[A] \leq 1$$

$$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$$

$$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 9	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.

$B \subseteq A_1 \uplus \dots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$\Pr[B] > 0, B \subseteq A_1 \uplus \dots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i B] = \frac{\Pr[B A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^n \Pr[B A_i] \cdot \Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2 A_1] \cdot$ $\dots \cdot \Pr[A_n A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

8.2 Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Für Erwartungswert und Varianz gelten die folgenden Formeln (sofern $\mathbb{E}[X]$ und $\text{Var}[X]$ existieren).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] && \text{Erwartungswert} \\ \left(= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i], \quad \text{falls } W_X \subseteq \mathbb{N}_0 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot (x - \mathbb{E}[X])^2 && \text{Varianz}\end{aligned}$$

8.3 Gesetze zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Seien $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} &\iff \text{für alle } (a_1, \dots, a_n): \\ &\Pr[X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n] \\ &= \Pr[X_1 = a_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = a_n] \end{aligned}$$

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \implies f_1(X_1), \dots, f_n(X_n) \text{ unabhängig}$$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$$

$$X(\omega) \leq Y(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega \implies \\ \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

Monotonie des
Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i]$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$$

$\mathbb{E}[a_1 X_1 + \dots + a_n X_n]$ $= a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n]$	<p>Linearität des Erwartungswerts</p>
X_1, \dots, X_n unabhängig \implies $\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n]$	<p>Multiplikatивität des Erwartungswerts</p>
X_1, \dots, X_n unabhängig \implies $\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]$	<p>Varianz einer Summe</p>

$X \geq 0 \implies$ $\Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$ für $t > 0$	Markov
$\Pr[X - \mathbb{E}[X] \geq t]$ $\leq \text{Var}[X]/t^2$ für $t > 0$	Chebyshev
siehe Satz 63	Gesetz der großen Zahlen