SS 2in1 2011

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/

Sommersemester 2in1 2011

Kapitel 0 Organisatorisches

- Vorlesung:
  - Mo 11:15–12:45 und 15:00–16:30 (CH HS21010, Hans-Fischer-Hörsaal),
    Do 08:15–09:45 und 12:30–14:00 (CH HS21010)
  - zusätzliche Termine (alle CH HS21010):
    16.08.2011 Dienstag 14:00–15:30,
    24.08.2011 Mittwoch 08:15–09:45 und 13:00–14:30.
  - Pflichtvorlesung Bachelor Informatik, Wirtschaftsinformatik, Bioinformatik
- Übung:
  - 2SWS Tutorübung: Fr 14:15–15:45 (Räume siehe Übungswebseite)
    bitte Anmeldung in TUMonline
  - 2SWS Zentralübung (nicht verpflichtend): Di 14:00–15:30 (CH HS21010)
  - Übungsleitung: Dr. Werner Meixner
- Umfang:
  - 4V+2TÜ (+2ZÜ), 8 ECTS-Punkte (Modulnr. IN0015)
- Sprechstunde:
  - Do 11:00 - 12:00Uhr (MI 03.09.052) und nach Vereinbarung

- Übungsleitung:
  - Dr. W. Meixner, MI 03.09.040 (meixner@in.tum.de)
    Sprechstunde: Di 12:00–13:00 und nach Vereinbarung
- Sekretariat:
  - Frau Lissner, MI 03.09.052 (lissner@in.tum.de)
- Webseite:

http://wwwmayr.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/

- Haus-/Übungsaufgaben:
  - Ausgabe jeweils am Montag auf der Webseite der Übung zur Vorlesung
  - bestehend aus Vorbereitungs-, Tutor- und Hausaufgaben
  - Abgabe Dienstag eine Woche später bis 12Uhr, Briefkasten
  - Besprechung in der Tutorübung
  - vorauss. 7 Übungsblätter

- Klausur:
  - Klausur am 11. Oktober 2011, 15:00–18:00 (MW 2001)
    (Achtung: Die angegebenen Zeiten sind die reinen Bearbeitungszeiten. Anwesenheit mindestens 15min vorher.)
  - Wiederholungsklausur: tba
  - bei den Klausuren sind *keine* Hilfsmittel außer jeweils einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt zugelassen
  - Für das Bestehen des Moduls ist die erfolgreiche Teilnahme an der Abschlussklausur (mindestens 40% der Gesamtpunktzahl) erforderlich.
  - Die Erfahrungen der letzten Jahre legen nahe, dass es für die erfolgreiche Bearbeitung der Abschlussklausur sehr förderlich ist, die angebotenen Hausaufgabenblätter zu bearbeiten (Sie erhalten sie korrigiert zurück), an der Tutorübung und auch(!) an der (freiwilligen) Zentralübung teilzunehmen!

1. Ziel der Vorlesung

Der Zweck dieser Vorlesung ist der Erwerb der Grundlagen

- beim Umgang mit logischen, algebraischen und algorithmischen Kalkülen,
- beim Lösen kombinatorischer Problemstellungen,
- bei der quantitativen Betrachtung der Effizienz von Lösungsmethoden und Algorithmen

2. Wesentliche Inhalte

- Wiederholung grundlegender Begriffe der Mengenlehre und der Aussagenlogik
- Algebraische Strukturen (elementare Grundlagen aus der Gruppen-, Ring- und Körpertheorie)
- Kombinatorik (elementare Zählmethoden und kombinatorische Identitäten)
- Graphen und Algorithmen (grundlegende Definitionen, elementare Algorithmen)

3. Literatur


Steger, Angelika:
Diskrete Strukturen, Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra.
Springer, 2001


Gries, David und Schneider, Fred B.:
A Logical Approach to Discrete Math.
Springer, 1993


Schöning, Uwe:
Logik für Informatiker.
Spektrum-Verlag, 2000 (5. Auflage)


Aigner, Martin:
Diskrete Mathematik.
Vieweg, 1999 (3. Auflage)


Kreher, Donald L. und Stinson, Douglas R.:
Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search.
CRC Press, 1999


Rosen, Kenneth H.:
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 1995


Graham, Ronald L., Knuth, Donald E. und Patashnik, Oren:
Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.
Addison-Wesley, 1994


Pemmaraju, Sriram und Skiena, Steven:
Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica
Cambridge University Press, 2003

Kapitel I Einleitung, Grundlagen

1. Was sind Diskrete Strukturen?

Der relativ junge Begriff Diskrete Strukturen oder auch Diskrete Mathematik umfasst Kombinatorik, Graphentheorie, Optimierung, Algorithmik und einiges mehr. Das Gebiet beschäftigt sich mit wohlunterschiedenen Objekten. Wohlunterschieden sind z. B. die Elemente der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, jedoch nicht die Elemente der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Diskret bedeutet insbesondere, dass die betrachteten Mengen im Allgemeinen endlich oder abzählbar unendlich sind.

Was sind (keine) Diskreten Strukturen?

- Die Analysis (Integral- und Differentialrechnung), (komplexe) Funktionentheorie oder die Funktionalanalysis sind Teilgebiete der Mathematik, die sich mit kontinuierlichen Mengen und Größen befassen.
- Die Analysis (und Bereiche wie das Wissenschaftliche Rechnen) sind Grundlagen der Ausbildung von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren.
- In der Algebra, der Kombinatorik und z.B. der Graphentheorie sind jedoch häufig und z.T. fast ausschließlich diskrete Objekte oder Strukturen das Ziel der Betrachtungen und Untersuchungen.

(Forts.)

- In der Informatik spielen (letztlich auf Grund der umfassenden Verbreitung digitaler Rechner) diskrete Mengen und Strukturen die Hauptrolle (z.B. Texte, rasterorientierte Graphik, Kombinatorik, (Aussagen-)Logik, Schaltkreise und ICs, ...).
- Rechenzeit und Speicherplatz digitaler Rechner kommen in diskreten Einheiten vor.
- Aber: Ob der physikalische Raum oder die Zeit diskret sind, ist eine Frage (verschiedener) Weltmodelle der Physik!

2. Zusammenwirken mit / Abgrenzung von anderen Bereichen

Letztlich werden fast alle Bereiche der Mathematik benutzt; andererseits hat die Diskrete Mathematik großen Einfluss auf zahlreiche Bereiche der Mathematik und Informatik. Gelegentlich werden jedoch andere als die gebräuchlichen methodischen Grundlagen benötigt, z. B. da die betrachteten Funktionen im Allgemeinen nicht stetig sind.

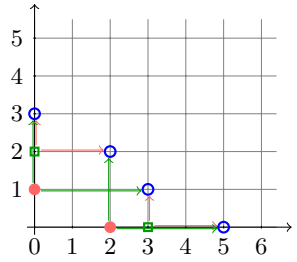
Beispiel 1

Polynome als Funktionen (mit Ableitung, Tangenten, ...) sind nicht unbedingt Stoff der Diskreten Mathematik; ein Beispiel für eine diskrete Betrachtung sind dagegen die sogenannten *Newton-Polytope*:

$y - x^2$:	$y^2 + x^3$:
$+y \mapsto (1, 0, 1)$	$+y^2 \mapsto (1, 0, 2)$
$-x^2 \mapsto (-1, 2, 0)$	$+x^3 \mapsto (1, 3, 0)$

Die Monome über $\{x, y\}$ werden also als (Faktor, x-Potenz, y-Potenz) dargestellt.

Beispiel 2



Die blauen Kreise entstehen durch Vektoraddition der grünen Quadrate und der roten Punkte und stellen die Polytope des Produkts

$$\left(y - x^2\right)\left(y^2 + x^3\right) = y^3 + yx^3 - y^2x^2 - x^5$$

dar (Minkowski-Addition).

3. Komplexität: Ein warnendes Beispiel

$$
\begin{aligned}
(k+2)\cdot\Bigg(1 \quad &- \quad \Big(wz+h+j-q\Big)^2 \\
&- \quad \Big((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z\Big)^2 \\
&- \quad \Big(2n+p+q+z-e\Big)^2 \\
&- \quad \Big(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big((a^2-1)y^2+1-x^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(n+l+v-y\Big)^2 \\
&- \quad \Bigg(\Big(\big(a+u^2(u^2-a)\big)^2-1\Big)\Big(n+4dy\Big)^2+1-\Big(x+cu\Big)^2\Bigg)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \Big((a^2-1)l^2+1-m^2\Big)^2 \\
&- \quad \Big(q+y\big(a-p-1\big)+s\big(2ap+2a-p^2-2p-2\big)-x\Big)^2 \\
&- \quad \Big(z+pl\big(a-p\big)+t\big(2ap-p^2-1\big)-pm\Big)^2 \\
&- \quad \Big(ai+k+1-l-i\Big)^2 \\
&- \quad \Big(p+l\big(a-n-1\big)+b\big(2an+2a-n^2-2n-2\big)-m\Big)^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

Die positiven Werte, die dieses Polynom mit $(a,\ldots,z)\in{\mathbb{N}_0}^{26}$ annimmt, sind genau alle Primzahlen.
Deshalb empfiehlt sich oft die Verwendung eines symbolischen Mathematikprogramms, z. B. Maple.

4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$
$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
$\emptyset$	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element

Spezielle Mengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} =$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} =$ Menge der Brüche (rationalen Zahlen)
- $\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C} =$ Menge der komplexen Zahlen
- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ Restklassen bei Division durch n
- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Elemente werden nach ihrer Herkunft unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ Vereinigung der Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i mit $i \in I$
- $\mathsf{P}(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzmenge der Menge M

Beispiel 4

Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

$$
\begin{aligned}
P(M) \quad = \quad \{ \quad & \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\
& \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\
& \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\
& \{a, b, c, d\} \\
\}
\end{aligned}
$$

Satz 5

Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:

Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. □

Bemerkungen:

1. Der obige Satz gilt auch für $n = 0$, also die leere Menge $M = \emptyset$.
2. Die leere Menge ist in jeder Menge als Teilmenge enthalten.
3. $P(\emptyset)$ enthält als Element genau $\emptyset$ (also $P(\emptyset) \neq \emptyset$).

4.2 Relationen und Abbildungen

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Eine Relation über $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

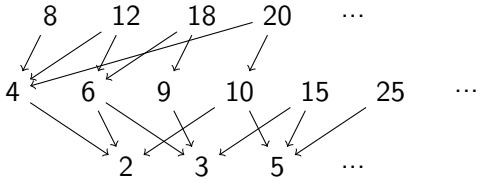
Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb.

Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

- reflexiv: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$
- symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A$
- asymmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$
- antisymmetrisch: $\big[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$
- transitiv: $\big[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A$
- Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Partielle Ordnung (aka *partially ordered set*, *poset*): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Beispiel 6

$(a, b) \in R$ sei $a|b$ „a teilt b“, $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Die graphische Darstellung ohne reflexive und transitive Kanten heißt Hasse-Diagramm:



Im Diagramm wird $a|b$ durch einen Pfeil $b \longrightarrow a$ dargestellt.
Die Relation | stellt eine *partielle Ordnung* dar.

Definition 7
Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

das Urbild der Relation R und

$$\{b \in B;\ (\exists a \in A)[(a,b) \in R]\}$$

das Bild der Relation R.

Definition 8
Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$R^{-1} := \{(b,a);\ (a,b) \in R\}$$

die inverse (oder auch konverse) Relation zu R.

Definition 9
Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C;\ (\exists b \in B)[(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S]\}$$

das Produkt der Relationen R und S. Es wird oft auch einfach durch RS bezeichnet.

Satz 10
Das Relationenprodukt $\circ$ ist assoziativ und distributiv über $\cup$ und $\cap$.

Beweis:
Hausaufgabe! □

Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- $\forall$ "für alle" und
- $\exists$ "es gibt"

gebraucht. Dies sind so genannte logische Quantoren, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A;\ (\exists b \in B)[(a,b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

Die Menge aller Elemente a aus der Menge A, für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a,b) in der Menge/Relation R enthalten ist.

Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

1. $R^0 := \{(a, a);\ a \in A\}$ $(=: \mathrm{Id}_A)$
2. $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k, v);\ k \text{ ist Kind von } v\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die Enkel-Relation.

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

1. Dann ist der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
2. Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
3. Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m“ ist die Menge der Tupel (k', m'), so dass gilt:

k' hat seine Mitochondrien von m' geerbt.

4.3 Funktionen

Sei $f : A \to B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $\big(f(a), a\big) \quad \forall a \in A$).
(Eine solche Relation heißt auch rechtstotal und linkseindeutig.)

- Das *Urbild* von $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}$.
- Schreibweisen: $(A' \subseteq A, B' \subseteq B)$
  - $f(A') = \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\}$
  - $f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$
- Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so ist ihre Komposition $g \circ f$ gemäß der entsprechenden Definition für das Relationenprodukt definiert.

Bemerkungen:
Man beachte, dass wir für eine Funktion $f : A \to B$ die zugehörige Relation $\hat{f}$ als die Menge

$$\{(f(a), a) \; ; \; a \in A\}$$

definiert haben, also die Abbildung sozusagen von rechts nach links lesen.
Der Grund dafür ist, dass es in der Mathematik üblich ist, die Komposition (Hintereinanderausführung) einer Funktion g nach einer Funktion f (also $g \circ f$) so zu lesen:

$$g \text{ nach } f \, .$$

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}\,.$$

Eigenschaften von $f : A \to B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B)\Big[\big|f^{-1}(b)\big| \leq 1\Big]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B)\Big[\big|f^{-1}(b)\big| \geq 1\Big]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B)\Big[\big|f^{-1}(b)\big| = 1\Big]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \to B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Eigenschaften von $f : A \to B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B, haben A und B *gleiche Kardinalität*.
Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|$!

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Sei R eine Relation über A, $\tilde{R}$ eine Relation über B.

- Eine Funktion $f : A \to B$ heißt Homomorphismus von R nach $\tilde{R}$, falls gilt:

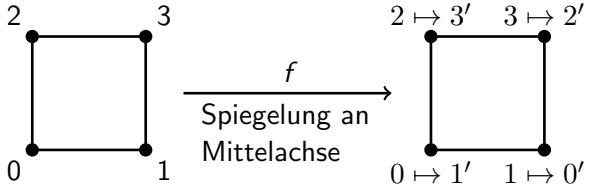
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \Rightarrow \Big(f\big(a_1\big), \ldots, f\big(a_k\big)\Big) \in \tilde{R}$$

- Eine Bijektion $f : A \to B$ heißt Isomorphismus zwischen R und $\tilde{R}$, falls gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \iff \Big(f\big(a_1\big), \ldots, f\big(a_k\big)\Big) \in \tilde{R}$$

Beispiel 16

Relation: Die Kantenmenge $E = \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ des Graphen mit der Knotenmenge $\{0,1,2,3\}$
Funktion: Spiegelung der Knotenmenge wie gezeichnet an der Mittelachse



$E' = f(E) = \{\{0',1'\},\{1',3'\},\{0',2'\},\{2',3'\}\}$
f ist ein Isomorphismus bzgl. (der Relation) E.

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
  („untere Gaußklammer“, „*floor*“, „*entier*“)
- $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
  („obere Gaußklammer“, „*ceiling*“)

Beispiel 17

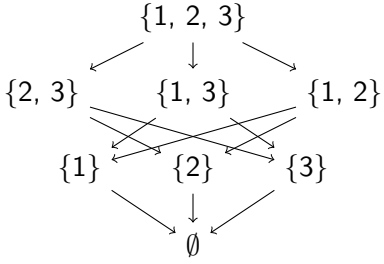
$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.4 Partielle Ordnungen

Sei $(S, \preceq)$ eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A),\ \preceq \equiv \subseteq,\ A = \{1, 2, 3\}$
Hassediagramm:



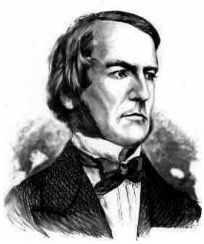
Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen vergleichbar (bzgl. $\preceq$), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst unvergleichbar.
- Ein Element $a \in S$ heißt minimal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt maximal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt linear oder vollständig, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält $\big($z. B. $(\mathbb{N}_0, \leq)\big)$.

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logiken

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und“, „oder“, oder der Negation.

Der Boolesche Aussagenkalkül stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

more on George Boole

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens.
  Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:

  wenn A gilt/wahr ist, dann auch B.

- Alternative Sprechweisen:
  - „Wenn A, dann B“
  - „Aus A folgt B“, „B ist eine Folge von A“
  - „A impliziert B“, „$A \Rightarrow B$“
  - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Bemerkung:

- Unter einer Implikation versteht man gewöhnlich einen Ausdruck/eine Behauptung der Form

$$\text{aus } A \text{ folgt } B \qquad \text{bzw.} \qquad A \Rightarrow B\,.$$

- Unter einer Inferenz versteht man den Vorgang, (im Rahmen einer Logik) für A und B (wie oben) von der Aussage/Behauptung A zu der Aussage/Behauptung B zu kommen.

Achtung!

Wenn (irgendwie) eine Implikation

$$\text{aus } A \text{ folgt } B$$

gilt/wahr ist, so heißt das von sich aus noch nicht, dass

- A gilt/wahr ist, oder
- B gilt/wahr ist.

Es sagt nur, dass, wenn A gilt, dann auch B.

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von atomaren Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der Operatoren (Konnektoren, Junktoren) „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, ... dann“(u.a.) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind entweder wahr oder falsch.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der Booleschen Logik.

Formalismen der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik (wie jede Logik) bildet eine formale Sprache.
- Eine formale Sprache wird durch ihre Syntax und ihre Semantik definiert.
- Die Syntax der Sprache legt durch Regeln fest, welche Zeichenketten wohlgeformte Ausdrücke sind.
  Die wohlgeformten Ausdrücke einer Logik heißen Formeln.
- Die Semantik legt die Bedeutung der Ausdrücke fest.
  Eine formale Semantik ordnet jedem (wohlgeformten) Ausdruck ein mathematisches Objekt zu, welches die Bedeutung des Ausdrucks darstellt.

Syntax

- Eine formale Syntax besteht aus einem Vokabular und einer Menge von Formationsregeln/Bildungsgesetzen.
- Das Vokabular legt fest, welche Zeichen in Ausdrücken vorkommen dürfen
- Die Bildungsgesetze legen fest, welche Zeichenketten über dem Vokabular zulässig oder wohlgeformt sind (und welche nicht).

Syntax für die Aussagenlogik (ohne Quantoren)

1. true und false sind Formeln (alternativ: 1/0, wahr/falsch, ...);
2. eine Aussagenvariable (wie x oder p) ist eine Formel;
3. sind F und G Formeln, dann ist auch
   - $\neg F$ (alternative Darstellung: $\overline{F}$)
   - $(F \wedge G)$
   - $(F \vee G)$
   - $(F \Rightarrow G)$
   - (F)

   eine Formel;
4. Ein Ausdruck ist nur dann eine Formel, wenn er durch endlichmalige Anwendung der obenstehenden Regeln konstruiert werden kann.

Beispiele für aussagenlogische Formeln

- Beispiele für aussagenlogische Formeln sind:
  1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
  2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  3. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  4. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- Keine Formeln sind dagegen:
  1. $\vee(p \Rightarrow q)$
  2. $p \wedge q \vee r$

Semantik der Aussagenlogik

- Eine Belegung („eine Welt“) ist eine Funktion von einer Menge von Aussagenvariablen in die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte.
- Die Belegung $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ ist eine Belegung für die Formel $p \Rightarrow q$.
- Unter der Belegung $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 0 (oder **false**).
- Unter der Belegung $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 1 (oder **true**).
- Die Semantik einer booleschen Formel ist ihr Wert unter allen möglichen Belegungen (der darin vorkommenden Variablen).

Wahrheitstabellen

Damit ergibt sich

- Die Formel $\neg p$ ergibt genau dann **wahr** wenn p mit 0/**false** belegt wird.
- Die Formel $p \Rightarrow q$ ist genau dann **false**, wenn p gleich 1/**true** und q gleich 0/**false** ist.
- Wir sagen, dass eine Belegung eine Formel erfüllt, falls unter der Belegung der resultierende Wahrheitswert der Formel gleich 1/**true** ist.

Allgemeingültige Aussagen

Definition 19

- Eine (aussagenlogische) Formel p heißt allgemeingültig (oder auch eine Tautologie), falls p unter jeder Belegung **wahr** ist.
- Eine (aussagenlogische) Formel p heißt erfüllbar, falls es (mindestens) eine Belegung gibt, unter der p **wahr** ist.

Damit folgt:

- Die Formel $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ist allgemeingültig (eine Tautologie).
- Die Formel **false** $\Rightarrow p$ ist allgemeingültig.
- Die Formel $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$ ist erfüllbar.
- Die Formel $p \wedge q \wedge (p \Rightarrow \neg q)$ ist nicht erfüllbar.

Definition 20

- Unter dem Erfüllbarkeitsproblem (SAT) verstehen wir die Aufgabe, festzustellen, ob eine gegebene (aussagenlogische) Formel erfüllbar ist.
- Unter dem Tautologieproblem (TAUT) verstehen wir die Aufgabe, festzustellen, ob eine gegebene (aussagenlogische) Formel eine Tautologie ist.

Boolesche Funktionen

Sei $\mathbb{B}$ die Menge $\{0,1\}$ der booleschen Werte.
Jede n-stellige boolesche Funktion bildet jede Kombinationen der Werte der n Eingangsgrößen jeweils auf einen Funktionswert aus $\{0,1\}$ ab.

$$f : \mathbb{B}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$$

Beobachtung: Da $|\mathbb{B}| = 2$, gibt es genau 2^n verschiedene Tupel in $\mathbb{B}^n$.
Da wir für jedes dieser Tupel den Funktionswert beliebig $\in \mathbb{B}$ wählen können, gibt es genau 2^{2^n} verschiedene (totale) Boolesche Funktionen mit n Argumenten.

Boolesche Funktionen mit einem Argument

Nach der obigen Formel gibt es $2^{2^1} = 4$ boolesche Funktionen mit einem Argument:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

f_1: „falsch“-Funktion
f_2: „wahr“-Funktion
f_3: Identität
f_4: Negation

Wir betrachten nun die Menge aller zweistelligen booleschen Funktionen.

(Unäre und) binäre Verknüpfungen boolescher Werte:

								$\equiv$		n a n d	$\not\equiv$					n o r	
			$\vee$	$\Leftarrow$		$\Rightarrow$		$=$	$\wedge$		$\neq$						
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	f	f	f	f	f	f	f	f
t	f	t	t	t	t	f	f	f	f	t	t	t	t	f	f	f	f
f	t	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f

Normalformen boolescher Funktionen

Jeder boolesche Ausdruck kann durch (äquivalente) Umformungen in gewisse Normalformen gebracht werden!

Disjunktive Normalform (DNF) und Vollkonjunktion:
Eine Vollkonjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (jeweils als negiertes oder nicht negiertes Literal),
- alle Literale durch Konjunktionen $\wedge$ („und“) verbunden sind.

Die disjunktive („oder“, $\vee$) Verbindung von Vollkonjunktionen nennt man disjunktive Normalform (DNF). Statt $\neg a$ schreiben wir hier (auch, der Kürze halber) $\overline{a}$.

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \wedge b \wedge \overline{c})}_{\textit{Vollkonjunktion}} \vee \underbrace{(\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c})}_{\textit{Vollkonjunktion}} \vee \ldots \vee \underbrace{(\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c)}_{\textit{Vollkonjunktion}}}_{\textit{disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen}}$$

Ableitung der disjunktiven Normalform aus einer Wertetabelle

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Vollkonjunktion
- Terme mit Funktionswert „0“ tragen nicht zum Funktionsergebnis bei („oder“ von 0)

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- bilde Vollkonjunktionen für Zeilen mit Funktionswert „1“ $\rightarrow$ Zeilen 2 und 3 („0“ in Tabelle $\equiv$ Negation der Variablen)
- keine solche Zeile: $f(a, b) = 0$
- Zeile 2: $\overline{a} \wedge b$
- Zeile 3: $a \wedge \overline{b}$
- disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen: $f(a, b) = (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b})$

Konjunktive Normalform (KNF/CNF) und Volldisjunktion

Eine Volldisjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (in Form eines negierten oder nicht negierten Literals),
- alle Literale durch Disjunktionen $\vee$ („oder“) verbunden sind.

Die konjunktive („und“) Verbindung von Volldisjunktionen nennt man konjunktive Normalform, kurz KNF (engl.: CNF).

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \vee b \vee \overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee b \vee \overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)}_{\textit{Volldisjunktion}}}_{\textit{konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen}}$$

Ableitung der konjunktiven Normalform

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Volldisjunktion
- Terme mit Funktionswert „1“ tragen nicht zum Funktionsergebnis bei („und“ mit 1)

a	b	$f(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- bilde Volldisjunktionen für Zeilen mit Funktionswert „0“ $\rightarrow$ Zeilen 1 und 3 („1“ in Tabelle $\equiv$ Negation der Variablen)
- keine solche Zeile: $f(a,b) = 1$
- Zeile 1: $a \vee b$
- Zeile 3: $\overline{a} \vee b$
- konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen: $f(a,b) = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b)$

Vergleich von DNF und KNF:

	DNF	KNF
wähle Zeilen mit Funktionswert	1	0
Bildung der Teil-Terme	Negation der „0“ Einträge Verknüpfung der Literale mit „und“	Negation der „1“ Einträge Verknüpfung der Literale mit „oder“
Verknüpfung der Teil-Terme	mit „oder“	mit „und“

De Morgan'sche Regeln

Durch Auswerten der Wahrheitswertetabelle stellen wir fest, dass

$$(p \vee q) \equiv \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$$

allgemeingültig ist; ebenso

$$(p \wedge q) \equiv \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}\,.$$

Diese beiden Tautologien werden als die De Morgan'schen Regeln bezeichnet, benannt nach Augustus de Morgan (1806–1871).

Modus Ponens

Durch Auswerten der Wahrheitstabelle stellen wir ebenfalls fest, dass

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

allgemeingültig ist.
Intuitiv bedeutet dies, dass wir, falls wir wissen, dass $p \Rightarrow q$ wahr ist (d.h., aus p (aussagenlogisch) stets q folgt) und dass auch p gilt, die Gültigkeit von q folgern können.

Dieses Prinzip des Modus Ponens wird in Beweisen sehr häufig verwendet.

Wichtige Bemerkung:

Ist eine boolesche Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$ mit den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allgemeingültig, und sind $F_1, \ldots, F_n$ boolesche Formeln (mit den Variablen $x_1, \ldots, x_r$), dann ist auch

$$F(F_1, \ldots, F_n)$$

allgemeingültig (mit den Variablen $x_1, \ldots, x_r$).

Quantoren

Sei $F(p, q, \ldots)$ eine boolesche Formel mit den Variablen p, q, ... Manchmal (oder auch öfters) wollen wir (aus F abgeleitete) Eigenschaften G ausdrücken, die aussagen, dass

1. es eine Belegung für p gibt, so dass dann die resultierende Formel gilt, also

$$G(q, \ldots) = F(0, q, \ldots) \vee F(1, q, \ldots)\,;$$

2. für jede Belegung von p dann die resultierende Formel gilt, also

$$H(q, \ldots) = F(0, q, \ldots) \wedge F(1, q, \ldots)\,;$$

Hierfür verwenden wir die folgende Notation:

1. $G(q, \ldots) = (\exists p)[F(p, q, \ldots)]$
2. $H(q, \ldots) = (\forall p)[F(p, q, \ldots)]$

Prädikatenlogik

Oft wollen wir Eigenschaften betrachten, die Elemente über einem anderen Universum als das der booleschen Werte $\mathbb{B}$ betreffen.

Sei $\mathcal{U}$ ein solches Universum.

Definition 21

- Ein Prädikat P über $\mathcal{U}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}^n$, für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$.
- Die Formel $P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$ ist **true** gdw $(x_1, \ldots, x_n)$ Element der entsprechenden Teilmenge ist.

Beispiel 22

Sei das Universum die Menge $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, sei $P(n)$ das Prädikat „$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist prim“, und sei „$<$“das Prädikat „kleiner als“ (geschrieben in Infix-Notation), dann bedeutet

- $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{1\})[P(p) \wedge (p > n)]$
  „Es gibt unendlich viele Primzahlen!“
- $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ \exists p, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\})[p > n \wedge P(p) \wedge q = p + 2 \wedge P(q)]$
  „Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge!“

Bemerkungen:

1. Die Bedeutung von $\equiv$ (und damit $\not\equiv$) ist klar. $\equiv$ wird oft, vor allem in Beweisen, auch als

   $$\Leftrightarrow$$

   geschrieben (im Englischen: iff, if and only if).
2. Für zwei boolesche Aussagen A und B ist $A \Rightarrow B$ falsch genau dann wenn $A = t$ und $B = f$.
3. $A \Rightarrow B$ ist damit äquivalent zu $\neg A \vee B$.
4. $A \Rightarrow B$ ist damit auch äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Wichtige Beobachtung:
Gilt also (oder beweisen wir korrekt) $A \Rightarrow f$ (also: „aus der Bedingung/Annahme A folgt ein Widerspruch“), so ist A falsch!

4.6 Beweistechniken

Die meisten mathematischen Behauptungen sind von der Form

$$A \Rightarrow B \text{ bzw. } (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B\,.$$

Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir zeigen:

1. Unter der Annahme A können wir B zeigen (direkter Beweis).
2. Unter der Annahme $\neg B$ können wir $\neg A$ zeigen (indirekter Beweis).
3. Unter den Annahmen $\neg B$ und A können wir einen Widerspruch zeigen (Widerspruchsbeweis).

Beispiel 23 (Direkter Beweis)

Satz 24

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

$n \in \mathbb{N}_0$ ungerade

$$\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0)\,[n = 2m+1] \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = \underbrace{\underbrace{4m^2+4m}_{\text{gerade}}+1}_{\text{ungerade}} \Rightarrow n^2 \text{ ungerade.} \qquad \square$$

Beispiel 25 (Indirekter Beweis)

Satz 26
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:
Zunächst überzeugen wir uns (siehe Hausaufgabe), dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)[\text{„}n \text{ gerade“} \equiv \text{„}n+1 \text{ ungerade“}]\,.$$

Nachdem wir dieses Lemma bewiesen haben, ist die Aussage des Satzes gleichbedeutend mit

„Falls $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.“

Diese Aussage wurde in Satz 24 bewiesen. □

Beispiel 27 (Beweis durch Widerspruch)

Wir nehmen an, dass die zu zeigende Aussage falsch ist und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Satz 28

$\sqrt{3}$ ist irrational, d. h. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis:

Widerspruchsannahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \quad \textbf{(*)}$$
$$\Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0)\,[p = 3k]$$
$$\Rightarrow 3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|q \Rightarrow 3|\,\mathrm{ggT}(p,q)$$

Das ist ein Widerspruch zu **(*)**. □

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Wir zeigen zunächst den Induktionsanfang, also $P(0)$, und folgern dann aus der Induktionsvoraussetzung, also der Annahme $P(n)$ bzw. den Annahmen $P(0), P(1), \ldots, P(n)$, die Behauptung $P(n+1)$.

Beispiel 29

Satz 30

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis:
Induktionsanfang: $n = 0$ trivial $0 = 0$

Induktionsannahme: $P(n)$, also Satz richtig für n
Induktionsschluss:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i \ + n + 1 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 =$$
$$= \frac{2 \cdot (n+1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dies ist $P(n+1)$, die Behauptung für $n+1$. □

Das Schubfachprinzip (*pigeon hole principle*)

Satz 31
Sei $f : X \to Y$, *sei* $\infty > |X| > |Y| \geq 1$, *dann*

$$(\exists y \in Y)\left[|f^{-1}(y)| \geq 2\right]$$

Beweis:
Sei $|X| = n, |Y| = m$, und sei $n > m$. Widerspruchsannahme: Kein $y \in Y$ hat mehr als ein Urbild in X. Die Bilder der ersten m Elemente aus X müssen dann notwendigerweise verschieden sein. Damit hat jedes $y \in Y$ ein Urbild in X. Da f total ist, muss das Bild des $(m+1)$-ten Elements aus X dann als Bild ein Element aus Y haben, das bereits Bild eines anderen $x \in X$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Beispiele:

– Seien 13 oder mehr Personen in einem Raum. Dann haben mindestens 2 der Personen im gleichen Monat Geburtstag.

– Behauptung: In jeder Menge P von Personen ($|P| \geq 2$) gibt es immer mindestens 2 Personen, die gleich viele (andere) Personen in der Menge kennen („kennen“ symmetrische Relation).

Beweis:

1. Überlegung: Sei $n = |P|$. Wir betrachten die Abbildung $P \ni p \mapsto \#$ Personen, die p kennt $\in \{0, \ldots, n-1\}$
2. Weitere Überlegung:
   1. 1. Fall: 0 kommt als Bild nicht vor (jeder kennt mindestens eine andere Person). $\Rightarrow$ |Urbildmenge| $= n$ und |Bildmenge| $\leq n-1$. Das Schubfachprinzip liefert die Behauptung.
   2. 2. Fall: 0 kommt als Bild vor. $\Rightarrow$ Es gibt also (wegen der Symmetrie) mindestens eine Person, die kein anderer kennt. Also ist der Wertebereich der Funktion $\subseteq \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Das Schubfachprinzip liefert nunmehr ebenfalls den Beweis.

□

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Satz 32

Sei $f : X \to Y, \infty > |X| \geq |Y| \geq 1$. *Dann existiert ein* $y \in Y$, *so dass*

$$\left|f^{-1}(y)\right| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil .$$

Beweis:

Es gilt $|X| = \left|\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)\right| = \sum_{y\in Y} \left|f^{-1}(y)\right|$. Das zweite „=“ gilt, da die $f^{-1}(y)$ alle paarweise disjunkt sind!

Widerspruchsannahme:

$$(\forall y \in Y)\left[\left|f^{-1}(y)\right| \leq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1\right]$$

Da

$$\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \leq \frac{|X| + |Y| - 1}{|Y|} - 1 = \frac{|X| - 1}{|Y|}\,,$$

folgt mit der Widerspruchsannahme

$$|X| = \sum_{y\in Y} \left|f^{-1}(y)\right| \leq |Y| \cdot \frac{|X| - 1}{|Y|} = |X| - 1\,.$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. □

Ein Beispiel aus der Ramsey-Theorie:

Satz 33

In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich gegenseitig kennen, oder 3 Personen, von denen keiner die beiden anderen kennt.

Beweis:
$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_6\}$. Betrachte die Abbildung

$$\{2, \ldots, 6\} \to \{0, 1\}$$
$$\{2, \ldots, 6\} \ni i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i\text{“} \\ 0 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i \text{ nicht“} \end{cases}$$

Aus dem verallgemeinerten Schubfachprinzip folgt: Es gibt mindestens 3 Leute $\in \{p_2, \ldots, p_6\}$, die p_1 kennen, oder es gibt mindestens 3 Leute, die p_1 nicht kennen.
Wir betrachten die erste Alternative, die zweite ist analog. O. B. d. A. kennt p_1 p_2, p_3 und p_4.
1. Fall:
$\big(\exists p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}\big)\big[i \neq j$ und p_i kennt $p_j\big]$, z. B. $i = 2, j = 4$. Dann erfüllen $\{p_1, p_i, p_j\}$ den ersten Teil der Behauptung.
2. Fall: (Komplement des 1. Falls!)
$\big(\forall p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}\big)\big[i \neq j \Rightarrow p_i$ kennt p_j nicht$\big]$. Dann erfüllen $\{p_2, p_3, p_4\}$ den zweiten Teil der Behauptung. □

Beispiel 34 (Indirekter Beweis, Wohlordnungseigenschaft)

Satz 35

Sei S eine endliche Menge $\neq \emptyset$, und sei $f : S \to S$ eine Abbildung von S in S. Dann gilt:

$$(\exists r \in \mathbb{N})[f^r(S) = f(f^r(S))]\,.$$

Dabei ist $f^0 : S \to S$ als die Identität auf S und, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, f^{n+1} als $f \circ f^n$ definiert.

Beweis:

Falls f bijektiv ist, dann erfüllt $r = 1$ die Behauptung. Wir nehmen daher an, dass f nicht bijektiv, also nicht surjektiv ist, so dass $f(S) \subsetneq S$. Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Weitere Annahme: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{m+1}(S) \subsetneq f^m(S)$.

In diesem Fall hätte die Menge $\{|f^m(S)|;\ m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$ kein *kleinstes Element*, da stets $|f^{m+1}(S)| < |f^m(S)|$.
Widerspruch zur Wohlordnungseigenschaft!

Sei also $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft

$$f^{m+1}(S) = f^m(S) \ .$$

Dann erfüllt $r = m$ die Behauptung. □

Alternativer, direkter Beweis

Beweis:

Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Die Menge $\{|f^m(S)|;\ m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_0$ ist nicht leer und besitzt deshalb aufgrund der Wohlordnungseigenschaft ein minimales Element $|f^r(S)|$.

Damit gilt $|f^r(S)| \leq |f^{r+1}(S)|$.

Wegen $f^{r+1}(S) \subseteq f^r(S)$ folgt

$$|f^r(S)| = |f^{r+1}(S)|\,,$$

also auch $f^r(S) = f^{r+1}(S)$.

□

Beispiel 36

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und n ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

Beweis:

Falls $n = x^2 - y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$, dann gilt $n = (x - y)(x + y)$.
Sei nun $s := x + y$ und $t := x - y$. Dann ist

$$\begin{aligned} s &> t > 0 \\ n &= s \cdot t \\ x &= (s + t)/2 \\ y &= (s - t)/2 \end{aligned}$$

Also müssen s und t beide gerade oder beide ungerade sein.

Beweis (Forts.):

Da

$$
\begin{aligned}
s &> t > 0 \\
n &= s \cdot t \\
x &= (s+t)/2 \\
y &= (s-t)/2
\end{aligned}
$$

kann man für ungerades n stets $s := n$ und $t := 1$ setzen und erhält damit $x = (n+1)/2$ und $y = (n-1)/2$, die die Behauptung erfüllen! □

Bemerkungen:

1. Falls n eine ungerade Primzahl ist, sind s und t eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für x und y.
2. Für allgemeine n kann es mehr als eine Lösung geben, z.B. für $n = 15$

$$s = 5, t = 3 \text{ und } 15 = 16 - 1\,, \text{ oder}$$
$$s = 15, t = 1 \text{ und } 15 = 64 - 49\,.$$

3. Auch für gerade n kann es Lösungen geben, z.B.

$$8 = 9 - 1$$
$$48 = 7^2 - 1^2$$
$$48 = 8^2 - 4^2$$

4.7 Einige Sprechweisen

1. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist hinreichend für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Rightarrow B\,.$$
2. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Leftarrow B \text{ (bzw. } B \Rightarrow A\text{)}\,.$$
3. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig und hinreichend für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Leftrightarrow B \text{ (bzw. } A \equiv B\text{)}\,.$$

4.8 Folgen und Grenzwerte

R bezeichne einen Bereich wie z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$.

Definition 37

1. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Eine endliche Folge reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen

   $$(a_i)_{0 \le i \le k}$$

   ist eine Abbildung

   $$\{0, 1, \ldots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R\,.$$

2. Eine unendliche Folge

   $$(a_n)_{n \ge 0}$$

   ist eine Abbildung

   $$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R\,.$$

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ nach a“,
und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
falls gilt:
$$(\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon]\,.$$

2. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $+\infty$“,
und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$
falls gilt:
$$(\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M)[a_n > M]\,.$$

Beispiel 38

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $a_n := \frac{1}{n} \sin n$.
Behauptung:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (für $n \to \infty$) gegen 0.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \epsilon^{-1}$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n}|\sin n| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{N} < \epsilon\,.$$

□

Bemerkungen:

1. Falls es für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

   so sagen wir, „die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ divergiert für $n \to \infty$“.
2. Konvergenz gegen $-\infty$ wird entsprechend definiert.
3. Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to R$ wird das Konvergenzverhalten (bzw. $\lim_{n\to\infty} f(n)$) analog definiert (indem man die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachtet!).

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$(\forall n \geq n_0) \quad \big[|f(n)| \leq c \cdot g(n)\big]$$
„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g“
- $f(n) \in o\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$(\forall n \geq n_0) \quad \big[|f(n)| < c \cdot g(n)\big]$$
„f wächst echt langsamer als g“

- $f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \ \big[|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\big]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht langsamer als g“

- $f(n) \in \omega\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \ \big[|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\big]$$

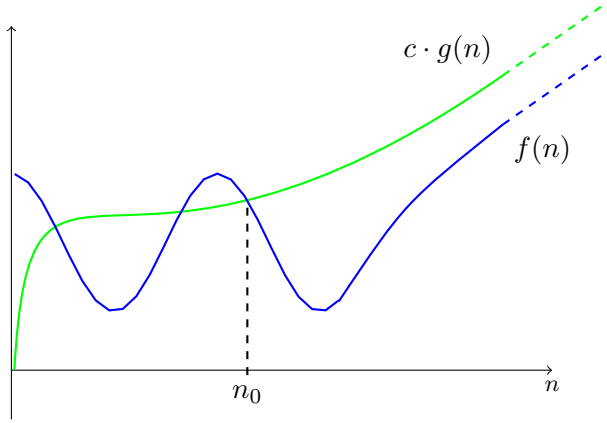
„f wächst echt schneller als g“

- $f(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn

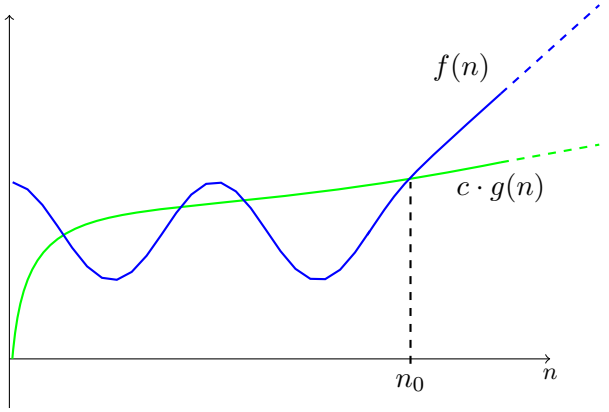
$$f(n) \in \mathcal{O}\big(g(n)\big) \text{ und } f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$$

„f wächst (bis auf konstante Faktoren) genauso schnell wie g“

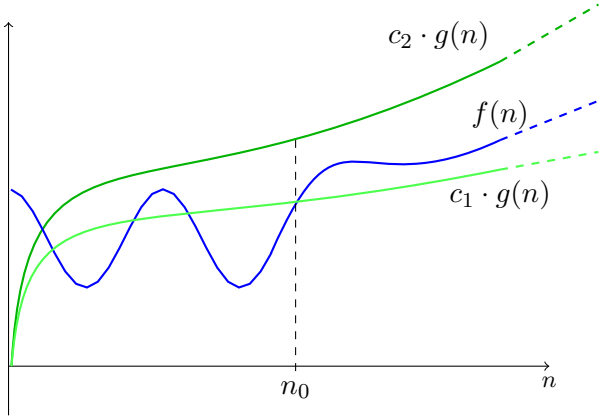
Graphische Darstellung von $\mathcal{O}$



Graphische Darstellung von ω



Graphische Darstellung von Θ



- $f(n) \in \Omega_\infty\big(g(n)\big)$ genau dann, wenn $\exists\ c > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

- $f(n) \in \omega_\infty\big(g(n)\big)$ genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

Bemerkungen:

1. Man schreibt oft, aber logisch unsauber $f(n) = \mathcal{O}\big(g(n)\big)$.
2. Oft werden nur Funktionen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ betrachtet (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$); dann sind die Absolutbeträge überflüssig.
3. Manchmal werden auch Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder das Verhalten für $x \to a$ betrachtet.
4. Achtung: Die Notation für Ω und Ω_∞ ist in der Literatur nicht eindeutig; im Zweifelsfall muss auf die jeweilige Definition geachtet werden!

Rechenzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße

Problemgröße	Zeitbedarf					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3×10^{-9} s	10^{-8} s	3×10^{-8} s	10^{-7} s	10^{-6} s	3×10^{-3} s
10^2	7×10^{-9} s	10^{-7} s	7×10^{-7} s	10^{-5} s	4×10^{13} yr	*
10^3	$1,0 \times 10^{-8}$ s	10^{-6} s	1×10^{-5} s	10^{-3} s	*	*
10^4	$1,3 \times 10^{-8}$ s	10^{-5} s	1×10^{-4} s	10^{-1} s	*	*
10^5	$1,7 \times 10^{-8}$ s	10^{-4} s	2×10^{-3} s	10 s	*	*
10^6	2×10^{-8} s	10^{-3} s	2×10^{-2} s	17 min	*	*

Annahme: eine Operation dauert 10^{-9} Sekunden, $\log n = \log_2 n$

Bezeichnung von Wachstums-Größenordnungen

$o(1)$	konvergiert gegen 0
$\mathcal{O}(1)$	beschränkt durch Konstante
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmische Funktion
$\mathcal{O}(\log^k n)$	polylogarithmische Funktion
$\mathcal{O}(n)$	linear beschränkte Funktion
$\bigcup_{k\geq 0} \mathcal{O}(n^k)$	polynomiell beschränkte Funktion
$\bigcup_{c\geq 0} \Omega(2^{cn})$	(mindestens) exponentielle Funktion

Beispiel 40

Behauptung: $n! \in O(n^n)$

Beweis:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big[n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \leq 1 \cdot n^n\ \big]$$

□

Beispiel 41

Behauptung: $\log n! \in O(n \log n)$

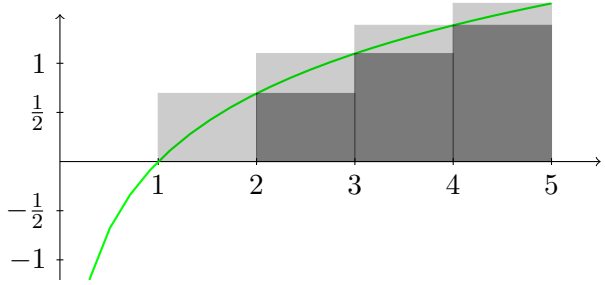
Beweis:
$(\forall n \in \mathbb{N})\big[\log n! = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1 < 1 \cdot n \cdot \log n\big]$ □

Beispiel 42

Behauptung: $n! = O\left((n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Beweis:

$$(\forall n > 0)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x \; dx < \sum_{k=2}^{n} \ln k < \int_1^{n+1} \ln x \; dx\right]$$



□

Es ist

$$\int_1^n \ln x \; dx = \big(x \cdot \ln x - x\big)\Big|_1^n = n \cdot \ln n - n + 1$$

und

$$\int_1^{n+1} \ln x \; dx = (n+1) \cdot \ln(n+1) - n$$

Also:

$$\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\left[n \cdot \ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1) \cdot \ln(n+1) - n\right]$$

und damit

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

oder:

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

□

Die Stirling'sche Formel

$$\lim_{n\to\infty}\left(n!\Big/\left(\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)=\sqrt{2\pi}$$

oder mit anderen Worten:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot(1+o(1))$$

Kapitel II Algebraische Grundlagen

1. Algebren

1.1 Grundbegriffe

Definition 43
Eine Algebra besteht aus einer Trägermenge S und einer Menge Φ von Operationen auf S (der Operatorenmenge). Dabei gilt: Jeder Operator ist eine (totale) Abbildung

$$S^m \to S$$

der Stelligkeit (Arität, arity) $m \in \mathbb{N}_0$.

- Nullstellige Operatoren sind Konstanten, z. B. 0, 47, $\bot$.
- Einstellige Operatoren sind unäre Operatoren, z. B. $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \neg x$, $A \mapsto 2^A$.
- Zweistellige Operatoren sind binäre Operatoren, z. B. $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto \mathrm{ggT}(x, y)$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- Dreistellige Operatoren sind ternäre Operatoren, z. B. $(x, y, z) \mapsto$ **if** x **then** y **else** z **fi**

Beispiel 44

Sei U eine Menge, F die Menge der Funktionen von $U \to U$. $(F, \circ)$ ist eine Algebra mit $\circ$ als Komposition von Funktionen.

Beispiel 45

Boolesche Algebra:
$\langle \{t, f\}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\} \rangle$ ist eine (endliche) Algebra.

1.2 Eigenschaften

Signatur einer Algebra

Definition 46

Die Signatur einer Algebra besteht aus der Liste der Stelligkeiten der Operatoren.

Beispiel 47

$\langle \mathbb{B}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\} \rangle$ (Boolesche Algebra, $\mathbb{B} = \{t, f\}$): 0, 0, 1, 2, 2

$$\begin{array}{lcrcl} \neg & : & \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ \wedge & : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ \vee & : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \end{array}$$

Beispiel 48

$\langle 2^U, \{U, \emptyset, \bar{}, \cap, \cup\} \rangle$: 0, 0, 1, 2, 2

$$\begin{array}{lcrcl} \bar{} & : & 2^U & \to & 2^U \\ \cap & : & 2^U \times 2^U & \to & 2^U \\ \cup & : & 2^U \times 2^U & \to & 2^U \end{array}$$

Diese beiden Algebren haben dieselbe Signatur; die Trägermenge ist unwesentlich, es kommt nur auf die Reihenfolge der Stelligkeiten an.

Einselement, Nullelement, Inverses

Sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra, $\circ$ beliebiger zweistelliger Operator.

Definition 49

- Ein Element $1 \in S$ heißt linkes (bzw. rechtes) Einselement für den Operator $\circ$, falls

$$(\forall a \in S) \quad 1 \circ a = a \text{ (bzw. } a \circ 1 = a)$$

  1 heißt Einselement, falls es linkes und rechtes Einselement ist.
- Ein Element $0 \in S$ heißt linkes (bzw. rechtes) Nullelement für den Operator $\circ$, falls

$$(\forall a \in S) \quad 0 \circ a = 0 \text{ (bzw. } a \circ 0 = 0)$$

  0 heißt Nullelement, falls es linkes und rechtes Nullelement ist.
- Sei 1 Einselement. Für $a \in S$ heißt $a^{-1} \in S$ Rechtsinverses von a, falls

$$a \circ a^{-1} = 1$$

  Analog: Linksinverses

Beispiel 50

Betrachte $F(U)$, d. h. die Menge aller Abbildungen $U \to U$. Dann gilt (mit der Komposition als Operator):

- $f \in F(U)$ hat genau dann ein Rechtsinverses, wenn f surjektiv ist.

  $$f \circ f^{-1} = id$$

  (Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g, so dass gilt: $g(x)$ wird von f auf x abgebildet.)
- $f \in F(U)$ hat genau dann ein Linksinverses, wenn f injektiv ist.

  $$f^{-1} \circ f = id$$

  (Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g, so dass gilt: $f(x)$ wird von g auf x abgebildet.)

Ist f bijektiv, dann stimmen die beiden f^{-1} aus (1) und (2) überein.

Satz 51

Falls c linkes Einselement ist und d rechtes Einselement (bezüglich des binären Operators $\circ$), dann ist

$$c = d\,.$$

Beweis:

$$d = c \circ d = c\,.$$

□

Satz 52

Falls c linkes Nullelement und d rechtes Nullelement (bezüglich $\circ$) ist, dann ist

$$c = d\,.$$

Beweis:

$$c = c \circ d = d\,.$$

□

Beispiel 53

Betrachte $\langle \{b, c\}, \{\bullet\} \rangle$ mit

$\bullet$	b	c
b	b	b
c	c	c

Es gilt: b und c sind linke Nullelemente, und b und c sind rechte Einselemente.

Abgeschlossenheit

Definition 54

Sei $\langle S, \Phi \rangle$ eine Algebra, T eine Teilmenge von S.

- T ist unter den Operatoren in Φ abgeschlossen (stabil), falls ihre Anwendung auf Elemente aus T wieder Elemente aus T ergibt.
- $\langle T, \Phi \rangle$ heißt Unteralgebra von $\langle S, \Phi \rangle$, falls $T \neq \emptyset$ und T unter den Operatoren $\in \Phi$ abgeschlossen ist.

Beispiel 55

- $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ ist Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, \cdot \rangle$ ist Unteralgebra von $\langle \mathbb{N}_0, \cdot \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, + \rangle$ ist keine Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, da sie nicht abgeschlossen ist $(1 + 1 = 2)$.

2. Morphismen

Seien $A = \langle S, \Phi \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$ zwei Algebren mit derselben Signatur.

2.1 Isomorphismus

Definition 56
Eine Abbildung

$$h : S \to \tilde{S}$$

heißt ein Isomorphismus von A nach $\tilde{A}$, falls

- h bijektiv ist und
- h mit den in Φ und $\tilde{\Phi}$ einander entsprechenden Operatoren vertauschbar ist (kommutatives Diagramm):

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\circ} & S \\ {\scriptstyle (h,\ldots,h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \tilde{S}^m & \xrightarrow{\tilde{\circ}} & \tilde{S} \end{array}$$

h ist also ein Isomorphismus gdw

- $h(c) = \tilde{c}$ für alle nullstelligen Operatoren (Konstanten) c
- $h\big(u(x)\big) = \tilde{u}\big(h(x)\big)$ für alle unären Operatoren $u \in \Phi$, $\forall x \in S$
- $h\big(b(x,y)\big) = \tilde{b}\big(h(x), h(y)\big)$ für alle binären Operatoren $b \in \Phi$, $\forall x, y \in S$

Notation: $A \cong \tilde{A}$: „A isomorph zu $\tilde{A}$“, d. h. es existiert ein Isomorphismus von A nach $\tilde{A}$ (und von $\tilde{A}$ nach A).

Ein Isomorphismus von A nach A heißt Automorphismus.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir statt $\langle S, \{o_1, \ldots, o_k\}\rangle$ auch

$$\langle S, o_1, \ldots, o_k\rangle \ ,$$

solange keine Verwechslung zu befürchten ist.

Beispiel 57

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\langle 2 \cdot \mathbb{N}_0, + \rangle$ ($2 \cdot \mathbb{N}_0$: gerade Zahlen) mit

$$h : \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto 2 \cdot n \in 2\mathbb{N}_0$$

ist ein Isomorphismus zwischen den beiden Algebren.

Beispiel 58

$\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ $\left(\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}\right)$

$$h : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \log x \in \mathbb{R}$$

ist ein Isomorphismus (der sog. Rechenschieberisomorphismus)

Satz 59

Ein Algebra-Isomorphismus bildet Einselemente auf Einselemente, Nullelemente auf Nullelemente und Inverse auf Inverse ab.

Beweis:

Sei die Abbildung $h : S \to \tilde{S}$ ein Isomorphismus von $A = \langle S, \Phi \rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$.
Sei 1 ein rechtes Einselement für den Operator $\circ \in \Phi$ in A. Dann gilt für alle $\tilde{b} \in \tilde{S}$:

$$\tilde{b} \tilde{\circ} h(1) = h(b) \tilde{\circ} h(1) = h(b \circ 1) = h(b) = \tilde{b}$$

Also ist $h(1)$ ein rechtes Einselement in $\tilde{A}$. Die Argumentation für linke Einselemente, Nullelemente und Inverse ist analog. □

2.2 Homomorphismus

Definition 60
Eine Abbildung

$$h\colon S \to \tilde{S}$$

heißt ein Homomorphismus von A nach $\tilde{A}$, falls h mit den in Φ und $\tilde{\Phi}$ einander entsprechenden Operatoren vertauschbar ist.

Beispiel 61

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \mathbb{Z}_m, +_{(m)} \rangle$ mit $+_{(m)}$ als Addition modulo m.

$$h \colon \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto n \bmod m \in \mathbb{Z}_m$$

ist ein (surjektiver) Homomorphismus ($\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$).

Beispiel 62

$\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ und $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ mit Σ^* Menge der endlichen Zeichenreihen über dem Alphabet Σ.

$$h \colon \Sigma^* \ni \sigma \mapsto |\sigma| \in \mathbb{N}_0$$

mit $|\sigma|$ der Länge der Zeichenreihe ist ein Homomorphismus.

Satz 63

Sei h ein Homomorphismus von $A = \langle S, \Phi \rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$. Dann ist $\langle h(S), \tilde{\Phi} \rangle$ eine Unteralgebra von $\tilde{A}$.

Beweis:

Offensichtlich. □

3. Halbgruppen

Definition 64

Eine Halbgruppe ist eine Algebra $\langle S, \circ \rangle$ mit einem assoziativen binären Operator $\circ$, d. h. für alle $a, b, c \in S$ gilt:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

Beispiel 65

$\langle \Sigma^*, \circ \rangle$: Menge der endlichen Zeichenreihen über dem Alphabet Σ, mit Konkatenation als $\circ$.

Beispiel 66

$S \subseteq \mathbb{R}$, $\langle S, \max \rangle$: Da die Maximumbildung assoziativ ist, ist $\langle S, \max \rangle$ eine Halbgruppe.

Beispiel 67

$\langle \{b, c\}, \circ \rangle$ mit

$\circ$	b	c
b	b	b
c	c	c

Auch diese Operation ist assoziativ.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
c = c \circ (c \circ c) &= (c \circ c) \circ c = c \\
b = b \circ (c \circ c) &= (b \circ c) \circ c = b \\
c = c \circ (b \circ c) &= (c \circ b) \circ c = c \\
c = c \circ (c \circ b) &= (c \circ c) \circ b = c \\
b = b \circ (b \circ b) &= (b \circ b) \circ b = b \\
c = c \circ (b \circ b) &= (c \circ b) \circ b = c \\
b = b \circ (c \circ b) &= (b \circ c) \circ b = b \\
b = b \circ (b \circ c) &= (b \circ b) \circ c = b
\end{aligned}
$$

□

3.1 Unterhalbgruppen

Definition 68
Sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Halbgruppe, $\emptyset \neq T \subseteq S$. $\langle T, \circ \rangle$ heißt Unterhalbgruppe, falls es eine Unteralgebra ist.

3.2 Abelsche Halbgruppen

Definition 69
Eine Halbgruppe $\langle S, \circ \rangle$ heißt abelsch, falls $\circ$ symmetrisch (kommutativ) ist. Also

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in S\,.$$

Abelsche (Halb-)Gruppen sind nach Nils H. Abel (1802–1829) benannt.

4. Monoide

Definition 70

Ein Monoid $\langle S, \circ, 1\rangle$ ist eine Halbgruppe $\langle S, \circ\rangle$ mit (linkem und rechtem) Einselement 1. Eine Algebra $\langle T, \circ\rangle$, $T \subseteq S$ heißt Untermonoid von $\langle S, \circ, 1\rangle$, wenn $\langle T, \circ\rangle$ eine Halbgruppe mit Einselement ist.

Beispiel 71

$\langle \mathbb{N}_0, \max\rangle$ ist ein Monoid mit 0 als Einselement, ein Untermonoid davon ist $\langle \{0, 1\}, \max\rangle$.

Beispiel 72

$\langle \Sigma^*, \circ\rangle$, mit $\circ$ Konkatenation von Zeichenreihen und der leeren Zeichenreihe ε als Einselement ist ein Monoid.

5. Gruppen

5.1 Grundlagen

Definition 73

Eine Gruppe ist eine Algebra $\langle S, \circ, 1 \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

- Der Operator $\circ$ ist assoziativ.
- 1 ist Einselement $\in S$.
- Für jedes $b \in S$ existiert $b^{-1} \in S$ mit

$$b \circ b^{-1} = 1 = b^{-1} \circ b$$

(Existenz des Inversen).

Beachte: Das Zeichen „1“wird hier in zwei (i.a.) verschiedenen Bedeutungen gebraucht, nämlich als Zeichen für das Einselement $\in S$ und (im Exponenten „-1“) als Zeichen für die natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$.

Beispiel 74

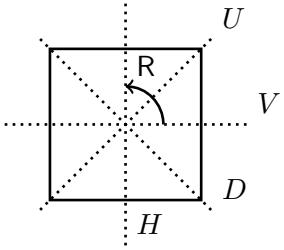
$\langle \mathbb{Z}_n, +_{(n)}, 0 \rangle$ ist nicht Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, da $+_{(n)}$ nicht die Restriktion (Einschränkung) von $+$ auf $\mathbb{Z}_n$ ist. Beide sind aber Gruppen.

Beispiel 75

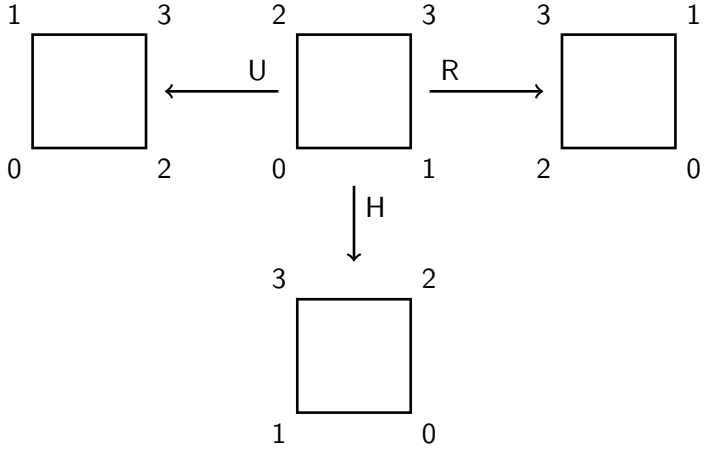
$\langle \mathbb{R}, \cdot, 1 \rangle$ oder $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ sind keine Gruppen! Zu dem Element $0 \in \mathbb{Q}$ gibt es kein inverses Element.
$\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle$ bzw. $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle$ sind Gruppen.

Beispiel 76

Automorphismengruppe des Quadrats
$\circ$ ist die Komposition von Abbildungen



I identische Abbildung,
R Rotation um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn
H horizontale Spiegelung, V vertikale Spiegelung,
D Spiegelung an der fallenden Diagonale, U Spiegelung an der steigenden.



Die Abbildungen $I, R, R^2, R^3, H, V, D, U$ bilden die Automorphismengruppe des Quadrats.

Verknüpfungstafel:

$\circ$	I	R	R^2	R^3	H	V	D	U
I	I	R	R^2	R^3	H	V	D	U
R	R	R^2	R^3	I	D	U	V	H
R^2	R^2	R^3	I	R	V	H	U	D
R^3	R^3	I	R	R^2	U	D	H	V
H	H	U	V	D	I	R^2	R^3	R
V	V	D	H	U	R^2	I	R	R^3
D	D	H	U	V	R	R^3	I	R^2
U	U	V	D	H	R^3	R	R^2	I

Satz 77

Sei $\langle S, \circ, 1\rangle$ eine Gruppe. Dann gilt:

- *für alle $a \in S$:* $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$ *(Involutionsgesetz)*
- *für alle $a, a', b \in S$ (Kürzungsregel):*

$$\begin{aligned} a \circ b = a' \circ b &\Rightarrow a = a' \\ b \circ a = b \circ a' &\Rightarrow a = a' \end{aligned}$$

- *für alle $a, x, b \in S$ (eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungen):*

$$\begin{aligned} a \circ x = b &\iff x = a^{-1} \circ b \\ x \circ a = b &\iff x = b \circ a^{-1} \end{aligned}$$

- *für alle $a, b, c \in S$ (Injektivität der Operation $\circ$):*

$$a \neq b \iff a \circ c \neq b \circ c \iff c \circ a \neq c \circ b$$

- *für alle $a, b \in S$ (Surjektivität der Operation $\circ$):*

$$(\exists x)(a \circ x = b) \text{ und } (\exists y)(y \circ a = b)$$

Beweis:

Wir beweisen lediglich: $a \circ c = b \circ c \iff a = b$. Rest: Übung

$\Leftarrow$: Dass

$$a = b \Rightarrow a \circ c = b \circ c$$

gilt, ist offensichtlich.

$\Rightarrow$: Sei $a \circ c = b \circ c$.

$$\begin{aligned} b &= b \circ \left(c \circ c^{-1}\right) = (b \circ c) \circ c^{-1} \overset{\text{n.V.}}{=} (a \circ c) \circ c^{-1} \\ &= a \circ \left(c \circ c^{-1}\right) = a \end{aligned}$$

□

5.2 Potenzen

Definition 78

Sei $\langle S, \circ, 1\rangle$ eine Gruppe, $a \in S$. Man definiert:

1. $a^0 := 1$
2. $a^n := a \circ a^{n-1} = a^{n-1} \circ a \quad \forall n \geq 1$
3. $a^{-n} := \left(a^{-1}\right)^n$

Satz 79

Sei $\langle S, \circ, 1\rangle$ eine Gruppe. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in S$:

1. $a^m \circ a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$
3. $a^m = a^n \iff a^{m-n} = 1$

Beweis:

Übung! □

5.3 Ordnung eines Gruppenelements

Definition 80

Sei $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe mit dem Einselement 1. Sei $a \in G$ (genauer: $a \in S$) ein Gruppenelement, $a \neq 1$. Dann ist die Ordnung $\mathrm{ord}(a)$ von a das minimale $r \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^r = 1\,.$$

Falls kein solches r existiert, dann ist $\mathrm{ord}(a) := \infty$. Falls gewünscht, kann man auch $\mathrm{ord}(1) := 1$ definieren.

Beispiel 81

$\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$: $\mathrm{ord}(1) = \infty$.

Satz 82

Sei G eine endliche Gruppe; dann hat auch jedes Element in G endliche Ordnung.

Beweis:

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \ni i \mapsto a^i \qquad a \in G \text{ beliebig } \neq 1$$

Also gibt es (pigeon hole principle) minimale k und j, $0 \leq j \leq k-1$, so dass

$$a^j = a^k.$$

Daraus folgt:

$$a^{k-j} = a^0 = 1.$$

Da k minimal gewählt wurde, folgt $j = 0$ und $\mathrm{ord}(a) = k$. □

Beispiel 83

Betrachte $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12}, 0 \rangle$:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathrm{ord}(a)$	-	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

5.4 Untergruppen

Definition 84

Eine Unteralgebra $\langle T, \circ, 1 \rangle$ einer Gruppe $G = \langle S, \circ, 1 \rangle$ heißt Untergruppe von G, falls $\langle T, \circ, 1 \rangle$ eine Gruppe ist.

Bemerkung: Nicht jede Unteralgebra einer Gruppe ist eine Untergruppe!

Beispiel 85

$\langle \mathbb{N}_0, +, 0 \rangle$ ist Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, aber keine Gruppe, da es im allgemeinen keine inversen Elemente gibt.

Satz 86

Eine Unteralgebra (bzgl. $\circ$) einer Gruppe ist eine Untergruppe, falls sie unter der Inversenbildung $^{-1}$ abgeschlossen ist.

Beweis:

Folgt sofort aus der Definition. □

Satz 87

Jede Unteralgebra (bzgl. $\circ$) einer endlichen Gruppe ist eine Untergruppe.

Beweis:

Sei $\langle T, \circ, 1\rangle$ eine Unteralgebra einer endlichen Gruppe $\langle S, \circ, 1\rangle$. Sei $b \in T$, $b \neq 1$. Dann gilt:

$$\mathrm{ord}(b) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Sei $m := \mathrm{ord}(b)$. Dann gilt:

$$1 = b^m = b^{m-1} \circ b = b \circ b^{m-1}$$

d. h. $b^{m-1} \in T$ ist das Inverse zu b. □

Satz 88

- *Sei $G = \langle S, \circ, 1\rangle$, $b \in G$ und sei*

$$S_b := \{b^m;\ m \in \mathbb{Z}\} \subseteq S$$

die von b erzeugte Untergruppe von G. S_b ist die kleinste Untergruppe, die b enthält.

- *Das Bild einer Gruppe (Halbgruppe, Monoid) unter einem Homomorphismus ist wieder eine Gruppe (Halbgruppe, Monoid).*
- *Seien $G_1 = \langle S_1, \circ, 1\rangle$ und $G_2 = \langle S_2, \circ, 1\rangle$ Untergruppen von $G = \langle S, \circ, 1\rangle$. Dann ist auch*

$$G_1 \cap G_2 = \langle S_1 \cap S_2, \circ, 1\rangle$$

eine Untergruppe von G.

Beweis:
Trivial, lediglich zur letzten Behauptung:

$$a \in S_1 \cap S_2 \;\Rightarrow\; a^{-1} \in S_1 \;\wedge\; a^{-1} \in S_2 \;\Rightarrow\; a^{-1} \in S_1 \cap S_2.$$

□

5.5 Nebenklassen und Normalteiler

Definition 89
Sei $H = \langle T, \circ, 1\rangle$ eine Untergruppe von $G = \langle S, \circ, 1\rangle$ und sei $b \in G$. Dann heißt

$$T \circ b := \{c \circ b;\ c \in T\} =: H \circ b$$

eine rechte Nebenklasse von H in G und

$$b \circ T := \{b \circ c;\ c \in T\} =: b \circ H$$

eine linke Nebenklasse von H in G (engl.: coset).
Die Anzahl verschiedener Nebenklassen von H in G heißt der Index von H in G:

$$\mathrm{ind}(H) = \mathrm{ind}_G(H).$$

H heißt Normalteiler von G, falls

$$H \circ b = b \circ H \quad \forall b \in G$$

d. h. H ist Normalteiler genau dann, wenn $\forall b \in G : H = b \circ H \circ b^{-1}$ („konjugiert“).

Beispiel 90

Betrachte $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12}, 1\rangle = \langle \{1,5,7,11\}, \cdot_{12}, 1\rangle$. Dann gilt: Die Untergruppe $\langle \{1,5\}, \cdot_{12}, 1\rangle$ ist Normalteiler (folgt aus Definition).

Satz 91

Sei H Untergruppe von G, $b \in G$. Dann ist die Kardinalität von $H \circ b$ gleich der Kardinalität von H (ebenso für $b \circ H$).

Beweis:

Folgt aus der Kürzungsregel: Betrachte die Abbildung

$$H \ni h \mapsto h \circ b \in H \circ b.$$

Diese Abbildung ist surjektiv und injektiv (Kürzungsregel!):

$$h_1 \circ b = h_2 \circ b \Rightarrow h_1 = h_2$$

□

Satz 92

Sei H Untergruppe von G. Dann bildet die Menge der rechten (linken) Nebenklassen von H eine Partition (Zerlegung einer Menge in disjunkte Teilmengen) von G.

Beweis:

Klar ist, dass

$$G \subseteq \bigcup_{b \in G} H \circ b$$

Seien $b, c \in G$ mit $H \circ b \cap H \circ c \neq \emptyset$, etwa $h_1 \circ b = h_2 \circ c$. Dann ist

$$H \circ c = H \circ {h_2}^{-1} \circ h_1 \circ b = H \circ b$$

□

Eigenschaften von Nebenklassen:

H sei Untergruppe von G, $b, c \in G$.

- Zwei Nebenklassen $H \circ b$ und $H \circ c$ sind entweder identisch oder disjunkt.
- Für alle $b \in G$ gilt $|H \circ b| = |H|$.

Satz 93 (Lagrange)

Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe in G. Dann

1. *haben alle Nebenklassen von H in G gleich viele Elemente;*
2. *ist $|G| = ind_G(H) \cdot |H|$;*
3. *teilt $|H|$ die Kardinalität $|G|$ von G ganzzahlig.*

Beweis:

1. siehe oben;
2. folgt aus Satz 92;
3. folgt aus 2.

□

Mehr zu Joseph-Louis Lagrange!

5.6 Satz von Fermat

Satz 94

Sei $b \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann gilt:

$$b^p \equiv b \bmod p, \ \textit{(falls } b \not\equiv 0 \bmod p \ : \ b^{p-1} \equiv 1 \bmod p)$$

(gemeint ist: die Gleichung $b^p = b$ gilt modulo p)

Beweis:

$\mathbb{Z}_p^* := \{n \in \{1, \ldots, p-1\}; \mathrm{ggT}(n,p) = 1\}$

1. Fall: $b = 0$: $0^p = 0 \bmod p$
2. Fall: $1 \leq b < p$: Betrachte $S_b = \langle \{b^0, b^1, \ldots, b^{\mathrm{ord}(b)-1}\}, \cdot \rangle$.
   S_b ist Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^*$.
   Lagrange: $\big(\mathrm{ord}(b) =\big)\ |S_b|\ \big||\mathbb{Z}_p^*|\big(= p-1\big)$

$$\Rightarrow (\exists q \in \mathbb{N})[q \cdot \mathrm{ord}(b)] = p - 1$$

   Da $b^{\mathrm{ord}(b)} = 1$ (Einselement) ist, gilt:

$$b^p = b^{p-1} \cdot b = b^{q \cdot \mathrm{ord}(b)} \cdot b = 1^q \cdot b = b \bmod p$$

3. Fall: $b \geq p$: Dann gilt:

$$(\exists q, r \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r < p)[b = q \cdot p + r].$$

   Damit:

$$b^p = (q \cdot p + r)^p \overset{(*)}{=} r^p \bmod p \overset{(**)}{=} r \bmod p = b \bmod p$$

   $(*)$ Binomialentwicklung, die ersten p Summanden fallen weg, da jeweils $= 0 \bmod p$;
   $(**)$ Fall 1 bzw. 2

□

Die umgekehrte Richtung

Satz 95

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann gilt:

$$b^{n-1} \equiv 1 \bmod n \text{ für alle } b \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \Longrightarrow n \text{ ist prim.}$$

Beweis:

[durch Widerspruch] Annahme: $r|n$ für ein $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$. Dann

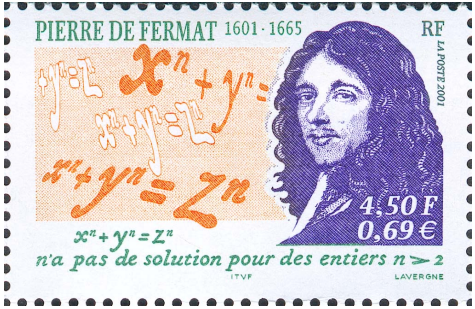
$$r^{n-1} - 1 \equiv (r \bmod n)^{n-1} - 1 \overset{\text{n. V.}}{\equiv} 0 \bmod n \ ,$$

also

$$r^{n-1} - 1 = q \cdot n = q \cdot q' \cdot r \text{ da } r|n \ .$$

Daraus folgt aber, dass $r|1$, n also keinen nichttrivialen Teiler besitzen kann. □

Pierre de Fermat (1601–1665)



Definition 96 (Eulersche phi-Funktion)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dann bezeichnet

$$\varphi(n) := |\mathbb{Z}_n^*|$$

die Anzahl der zu n teilerfremden Reste.

Satz 97

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dann gilt in der Gruppe $\langle \mathbb{Z}_n^*, \times_n, 1 \rangle$:

$$b^{\varphi(n)} = 1 \text{ für alle } b \in \mathbb{Z}_n^* \ .$$

Beweis:

Folgt sofort aus dem Satz von Lagrange (Satz 93)! □

Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler (1707–1783)

5.7 Zyklische Gruppen

Definition 98

Eine Gruppe $G = \langle S, \circ, 1\rangle$ heißt zyklisch, wenn es ein $b \in G$ gibt, so dass

$$G = S_b$$

wobei $S_b = \langle \{b^i | i \in \mathbb{Z}\}, \circ, 1\rangle$.

Satz 99

Sei G eine zyklische Gruppe. Falls G unendlich ist, ist G zu $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ isomorph; falls G endlich ist, dann ist G isomorph zu $\langle \mathbb{Z}_m, +_m, 0\rangle$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Beweis:

1. Fall: Sei G unendlich. Wir wissen: $G = \{b^i | i \in \mathbb{Z}\}$ für ein geeignetes $b \in G$, nach Voraussetzung.
Betrachte die Abbildung

$$h : \mathbb{Z} \ni i \mapsto b^i \in G$$

Behauptung: h ist bijektiv.
Nach Voraussetzung ist h surjektiv.
Die Injektivität beweisen wir mittels Widerspruch.

Annahme: $(\exists i, j, i \neq j)[b^i = b^j]$
Daraus folgt:

$$b^{i-j} = 1$$

Daher ist G endlich, es gilt nämlich:

$$G \subseteq \{b^k; 0 \leq k < |i - j|\}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, G sei unendlich!

Beweis (Forts.):

2. Fall: G endlich:

Wiederum ist die Abbildung h nach Voraussetzung surjektiv. Nach dem Schubfachprinzip

$$(\exists i, j, i \neq j)[b^i = b^j] \ .$$

Nach der Kürzungsregel können wir $j = 0$ wählen. Falls $i > 0$ und i minimal gewählt wird, folgt sofort

$$G \text{ isomorph } \langle \mathbb{Z}_i, +_i, 0 \rangle \ .$$

□

Satz 100

Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist wieder zyklisch.

Beweis:

Sei G zyklisch, $H \subseteq G$ Untergruppe von G.

1. Fall: $|G| = \infty$, also $G \cong \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ ($\cong$ isomorph).

   Sei H' die durch den Isomorphismus gegebene Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, die H entspricht.

   Zu zeigen ist: H' ist zyklisch.

   Sei $i := \min\Big\{k \in H'; k > 0\Big\}$.

   Die Behauptung ist:

   $$H' = S_i.$$

   Es gilt sicher:

   $$S_i \subseteq H'.$$

   Falls ein $k \in H' \setminus S_i$ existiert, folgt $k \bmod i \in H'$. Dies stellt einen Widerspruch zur Wahl von i dar. Also ist $H' = S_i$, damit ist gezeigt, dass H' und daher auch H zyklisch ist.

2. Fall: $|G| < \infty$: Der Beweis läuft analog.

□

5.8 Transformationsgruppen

Definition 101

Eine Transformationsgruppe ist eine Gruppe von bijektiven Abbildungen einer Menge U auf sich selbst mit der Komposition $\circ$ als binärem Operator:

$$g \circ f : U \ni x \mapsto g\big(f(x)\big) \in U$$

Satz 102 (Darstellungssatz für Gruppen)

Jede Gruppe ist isomorph zu einer Transformationsgruppe.

Beweis:
Sei $G = \langle S, \circ, 1\rangle$, $g \in G$. Betrachte die Abbildung

$$\tilde{g} : S \ni a \mapsto g \circ a \in S$$

Aus der Kürzungsregel und der Existenz eines Inversen folgt, dass $\tilde{g}$ eine bijektive Abbildung ist.
Wir betrachten nun $\tilde{G} := \langle \tilde{S}, \circ, \tilde{1}\rangle$ mit $\tilde{S} = \{\tilde{g};\ g \in G\}$. Die Abbildung

$$\tilde{}: \ S \ni g \mapsto \tilde{g} \in \tilde{S}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Für $h, g \in G$ gilt:

$$\widetilde{(h \circ g)}(a) = (h \circ g) \circ a = h \circ (g \circ a) = h \circ \tilde{g}(a) = \tilde{h}\big(\tilde{g}(a)\big) = \big(\tilde{h} \circ \tilde{g}\big)(a)$$

□

5.9 Permutationsgruppen

Definition 103

Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst; o. B. d. A. sei dies die Menge $U := \{1, 2, \ldots, n\}$.
S_n (Symmetrische Gruppe für n Elemente) bezeichnet die Menge aller Permutationen auf $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Sei nun $\pi \in S_n$. Es existiert folgende naive Darstellung:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Kürzer schreibt man auch

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Sei $a \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Betrachte die Folge

$$a = \pi^0(a),\ \pi^1(a),\ \pi^2(a),\ \pi^3(a),\ \ldots$$

Aus dem Schubfachprinzip und der Kürzungsregel folgt, dass es ein minimales $r = r(a)$ mit $r \leq n$ gibt, so dass $\pi^r(a) = a$. Damit bildet

$$\Big(a = \pi^0(a)\ \ \pi^1(a)\ \ \pi^2(a)\ \ \pi^3(a)\ \ \ldots\ \ \pi^{r-1}(a)\Big)$$

einen Zyklus der Permutation $\pi \in S_n$.
Umgekehrt liefert

$$\big(a\ \ \pi^1(a)\ \ \pi^2(a)\ \ \pi^3(a)\ \ \ldots\ \ \pi^{r-1}(a)\big)$$

eine zyklische Permutation der Zahlen

$$\{a,\ \pi^1(a),\ \pi^2(a),\ \pi^3(a),\ \ldots,\ \pi^{r-1}(a)\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\ .$$

Satz 104

Sei $\pi = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ *eine zyklische Permutation von* $\{1, 2, \dots, n\}$*, also*

$$\pi\colon\ a_i \mapsto a_{(i+1) \bmod n}$$

Dann gilt:

1. $\pi^k(a_i) = a_{(i+k) \bmod n}$
2. π *hat die Ordnung* n*.*

Beweis:

1. Leicht durch Induktion zu zeigen.
2. Aus 1. folgt: $\pi^n = \pi^0 = id$. Wäre $\operatorname{ord} \pi = m < n$, dann hätte der Zyklus die Form $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} \end{pmatrix}$ und a_m wäre gleich a_0, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

□

Satz 105

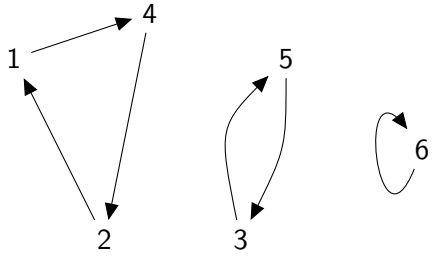
Jede Permutation aus S_n kann als Komposition (von endlich vielen) disjunkten Zyklen dargestellt werden.

Beweis:

Übung! □

Beispiel 106

$\pi = (1\ 4\ 2)(3\ 5)(6)$



In diesem Beispiel ist (6) ein Fixpunkt und $(3\ 5)$ eine Transposition (eine Permutation, die nur 2 Elemente vertauscht und alle anderen auf sich selbst abbildet).

Bemerkung:
Disjunkte Zyklen können vertauscht werden.

Korollar 107
Die Ordnung einer Permutation π ist das kgV der Längen ihrer Zyklen.

6. Boolesche Algebren

6.1 Definitionen

Eine Boolesche Algebra ist eine Algebra

$$\langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1 \rangle,$$

$\oplus, \otimes$ sind binäre, $\sim$ ist ein unärer Operator, 0 und 1 sind Konstanten. Es gilt:

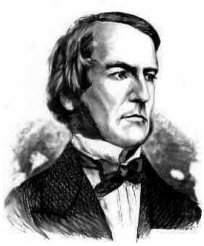
1. $\oplus$ und $\otimes$ sind assoziativ und kommutativ.
2. 0 ist Einselement für $\oplus$, 1 ist Einselement für $\otimes$.
3. für $\sim$ gilt:
$$\begin{aligned} b \oplus \sim b &= 1 \\ b \otimes \sim b &= 0 \quad \forall b \in S. \end{aligned}$$
4. Distributivgesetz:
$$\begin{aligned} b \otimes (c \oplus d) &= (b \otimes c) \oplus (b \otimes d) \\ b \oplus (c \otimes d) &= (b \oplus c) \otimes (b \oplus d) \end{aligned}$$

Bemerkung:
Eine boolesche Algebra ist keine Gruppe, weder bezüglich $\oplus$ ($b \oplus \sim b = 1$) noch bezüglich $\otimes$.

Beispiel 108

- $\langle \mathbb{B}, \vee, \wedge, \neg, F, T \rangle$
- $\langle 2^U, \cup, \cap, ^-, \emptyset, U \rangle$
- $\langle \{1,2,3,6\}, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT}, x \mapsto \frac{6}{x}, 1, 6 \rangle$

George Boole (1815–1864)



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

Satz 109 (Eigenschaften Boolescher Algebren)

1. *Idempotenz:*
$$(\forall b \in S)\Big[b \oplus b = b \quad \wedge \quad b \otimes b = b\Big]$$
2. *Nullelement:*
$$(\forall b \in S)\Big[b \oplus 1 = 1 \quad \wedge \quad b \otimes 0 = 0\Big]$$
3. *Absorption:*
$$(\forall b, c \in S)\Big[b \oplus (b \otimes c) = b \quad \wedge \quad b \otimes (b \oplus c) = b\Big]$$
4. *Kürzungsregel:*
$$(\forall b, c, d \in S)\left[\begin{array}{l}(b \oplus c = b \oplus d) \wedge (\sim b \oplus c = \sim b \oplus d) \Leftrightarrow c = d \\ (b \otimes c = b \otimes d) \wedge (\sim b \otimes c = \sim b \otimes d) \Leftrightarrow c = d\end{array}\right]$$

Satz 109 (Forts.)

5. *eindeutiges Komplement:*

$$(\forall b, c \in S)\Big[b \oplus c = 1 \ \wedge \ b \otimes c = 0 \iff c \ = \sim b\Big]$$

6. *Involution:*

$$(\forall b \in S)\Big[\sim (\sim b) = b\Big]$$

7. *Konstanten:*

$$\sim 0 = 1 \qquad \sim 1 = 0$$

8. *De-Morgan-Regeln:*

$$(\forall b, c, d \in S)\begin{bmatrix} \sim (b \oplus c) = \sim b \otimes \sim c \\ \sim (b \otimes c) = \sim b \oplus \sim c \end{bmatrix}$$

Augustus de Morgan (1806–1871)

Wir zeigen zunächst die Teilbehauptung 7:

$$\sim 0 = 1 \qquad \sim 1 = 0$$

Beweis:
Mit $b = 0$ folgt aus den Eigenschaften 2 und 3 Boolescher Algebren sofort

$$\sim 0 = 1 \,,$$

und ebenso mit $b = 1$

$$\sim 1 = 0 \,,$$

womit wir Behauptung 7 gezeigt haben. □

Folgende Hilfsbehauptung ist sehr nützlich:

$$1 = 1 \oplus (0 \otimes 1) = (1 \oplus 0) \otimes (1 \oplus 1) = 1 \otimes (1 \oplus 1) = 1 \oplus 1 \,.$$

Beweis:

[Es werden nur Teile des Satzes bewiesen.]

1. $$b \oplus b = (1 \otimes b) \oplus (1 \otimes b) = (1 \oplus 1) \otimes b = 1 \otimes b = b$$
2. $$b \oplus 1 = b \oplus \big(b \oplus (\sim b)\big) = (b \oplus b) \oplus (\sim b) = b \oplus (\sim b) = 1$$
3. $$b \oplus (b \otimes c) = (b \otimes 1) \oplus (b \otimes c) = b \otimes (1 \oplus c) = b \otimes 1 = b$$

□

Beobachtung:
Die Eigenschaften treten in Paaren auf, die durch Vertauschen von $\oplus$ und $\otimes$ und von 0 und 1 ineinander übergehen. Solche Eigenschaften heißen dual zueinander.

Da die Axiome unter Dualität abgeschlossen sind, folgt:

Das Duale eines Satzes ist wieder ein Satz.

Definition 110
Sei $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1 \rangle$ eine endliche Boolesche Algebra. Dann definiert man:

$$\begin{aligned} a \leq b &\iff a \otimes b = a \\ a < b &\iff a \leq b \ \wedge \ a \neq b \end{aligned}$$

Satz 111

Durch $\leq$ ist auf A eine partielle Ordnung definiert, d. h. eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation.

Beweis:

(a) Reflexivität: Zu zeigen ist, dass für alle $a \in S$ gilt $a \leq a$, d. h. $a \otimes a = a$ (Idempotenzgesetz bzgl. $\otimes$)

(b) Antisymmetrie: Sei $a \leq b \ \wedge \ b \leq a$. Damit gilt: $a \otimes b = a$ und $b \otimes a = b$ nach Definition. Damit:

$$a = a \otimes b = b \otimes a = b$$

(c) Transitivität: Sei $a \leq b \ \wedge \ b \leq c$, dann gilt: $a \otimes b = a$ und $b \otimes c = b$. Es ist zu zeigen, dass $a \leq c$, d.h. $a \otimes c = a$.

$$a \otimes c = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b = a$$

□

6.2 Atome

Definition 112

Ein Element $a \in S$, $a \neq 0$ heißt ein Atom, i. Z. $\text{atom}(a)$, falls

$$(\forall b \in S \setminus \{0\})\Big[b \leq a \;\Rightarrow\; b = a\Big].$$

Satz 113

Es gilt:

1. $\text{atom}(a) \;\Rightarrow\; (\forall b \in S) \quad [a \otimes b = a \;\vee\; a \otimes b = 0]$
2. $\text{atom}(a) \wedge \text{atom}(b) \wedge a \neq b \;\Rightarrow\; a \otimes b = 0$
3. *Falls gilt:* $(\forall a \in S)[\text{atom}(a) \;\Rightarrow\; a \otimes b = 0]$, *dann* $b = 0$.

Beweis:

[Wir zeigen nur die erste Teilbehauptung]

1. Sei a ein Atom. Nach Voraussetzung gilt (mit $a \otimes b$ statt b):

$$a \otimes b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(a \otimes b \leq a \;\Rightarrow\; a \otimes b = a\big)$$

Da aber $a \otimes b \leq a$ ist (Übungsaufgabe!), folgt

$$(a \otimes b = 0) \vee (a \otimes b = a).$$

□

Satz 114 (Darstellungssatz)

Jedes Element x einer endlichen Booleschen Algebra $\langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ lässt sich in eindeutiger Weise als $\oplus$-Summe von Atomen schreiben:

$$x = \bigoplus_{\substack{a \in S \\ \mathrm{atom}(a) \\ a \otimes x \neq 0}} a$$

Beweis:

Es gilt:

$$x \otimes \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} a \overset{\text{D-G.}}{=} \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} (x\otimes a) \overset{\text{Satz113}}{=} \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} a$$

Setze

$$y := \bigoplus_{\substack{a\in S\\ \mathrm{atom}(a)\\ a\otimes x\neq 0}} a\,.$$

Beweis (Forts.):

Wir haben gezeigt:

$$x \otimes y = y$$

Ebenso gilt:

$$x \otimes (\sim y) = 0 \quad \text{(Übungsaufgabe!)}$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} x &= x \otimes \big(y \oplus (\sim y)\big) \\ &\overset{\text{D–G.}}{=} \big(x \otimes y\big) \oplus \big(x \otimes (\sim y)\big) \\ &= y \oplus 0 = y \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Zur Eindeutigkeit: Sei (Widerspruchsannahme)

$$0 \neq x = \bigoplus_{a \in S_1} a = \bigoplus_{a \in S_2} a,$$

wobei $S_1, S_2 \subseteq S$, $S_1 \neq S_2$ zwei verschiedene Teilmengen von Atomen aus S sind. O. B. d. A. gelte $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ — wenn nicht, dann bilde die Schnittmenge mit $\left(\overline{S_1 \cap S_2}\right)$.

Beweis (Forts.):

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x &= x \otimes x = \Big(\bigoplus_{a \in S_1} a\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{a \in S_2} a\Big) \\
&= \bigoplus_{\substack{a \in S_1 \\ a' \in S_2}} \underbrace{a \otimes a'}_{=0} \\
&\overset{\text{Satz113(2)}}{=} \bigoplus_{\substack{a \in S_1 \\ a' \in S_2}} 0 = 0,
\end{aligned}
$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Korollar 115

Jede endliche Boolesche Algebra mit n Atomen enthält genau 2^n Elemente.

Korollar 116

Jede endliche Boolesche Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ mit n Atomen ist isomorph zur Potenzmengenalgebra

$$\mathcal{P}_n := \langle 2^{\{1,\ldots,n\}}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, \{1,\ldots,n\}\rangle$$

Beweis:

Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Atome von A. Definiere die Abbildung

$$h : S \ni \bigoplus_{i\in I} a_i \mapsto I \in 2^{\{1,\ldots,n\}}$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus (leicht nachzurechnen). □

Kapitel III Ringe und Körper

1. Definitionen und Beispiele

Definition 117

Eine Algebra $A = \langle S, \oplus, \odot, 0, 1\rangle$ mit zwei zweistelligen Operatoren $\oplus$ und $\odot$ heißt ein Ring, falls

R1. $\langle S, \oplus, 0\rangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in S$ ist,

R2. $\langle S, \odot, 1\rangle$ ein Monoid mit neutralem Element $1 \in S$ ist und

R3. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ für alle $a, b, c \in S$,
$(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$ für alle $a, b, c \in S$,
(man sagt: $\oplus$ und $\odot$ sind distributiv).

Definition 118

Eine Algebra $A = \langle S, \oplus, \odot, 0, 1\rangle$ mit zwei zweistelligen Operatoren $\oplus$ und $\odot$ heißt Körper (engl. field), falls

K1. $\langle S, \oplus, 0\rangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in S$ ist,

K2. $\langle S \setminus \{0\}, \odot, 1\rangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 \in S$ ist und

K3. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ für alle $a, b, c \in S$.

Beispiele 119

- Die Algebra der ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ ist ein kommutativer Ring.
- Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ist die Algebra der Restklassen bzgl. Division durch n, also $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n, 0, 1 \rangle$ ein kommutativer Ring.
- Die Menge der $n \times n$-Matrizen ($n \geq 1$) mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ ist ein im Allgemeinen nicht kommutativer Ring.

Beispiele 120

- $\mathbb{Q}$ (die Menge der rationalen Zahlen) ist ein Körper.
- Ebenso $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
- Die Restklassenalgebra $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n, 0, 1 \rangle$ ist für alle n, die prim sind, ein Körper.

2. Eigenschaften von Körpern

Satz 121
In jedem Körper K gilt:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \qquad \textit{für alle } a \in K\,.$$

Beweis:
Es sei a ein beliebiges Element aus K. Dann folgt aus den Axiomen:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot (0+0) - a \cdot 0 \\ &= a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0\,. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Satz 121 gilt sogar in Ringen.

Definition 122

Sei R kommutativ. Ein $a \in R$, $a \neq 0$, heißt Nullteiler, falls es ein $b \in R$ gibt, $b \neq 0$, so dass $ab = 0$.

Satz 123

In jedem Körper K gilt für alle $a, b \in K$:

$$ab = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0 \quad \textit{oder} \quad b = 0\,.$$

(Man sagt: Körper sind nullteilerfrei.)

Beweis:

Angenommen $ab = 0$. Falls $a \neq 0$, so existiert ein multiplikatives Inverses a^{-1} von a. Unter Verwendung von Satz 121 folgt damit:

$$b = 1 \cdot b = a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 = 0\,.$$

□

2.1 Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Definition 124

- Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann heißt $d \in \mathbb{N}$ der größte gemeinsame Teiler ($\mathrm{ggT}(a, b)$), falls gilt:
  1. $d|a$ und $d|b$;
  2. falls $d' \in \mathbb{N}$, $d'|a$ und $d'|b$, dann gilt $d'|d$.
- Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, dann definieren wir

$$\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) := \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)\,.$$

Satz 125

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $c, d \in \mathbb{Z}$, so dass

$$c \cdot a + d \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)\,.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $a > b$. Der Euklidische Algorithmus (fortgesetzte ganzzahlige Division mit Rest) (Euklid von Alexandria, ca. 325–265 v. Chr.) liefert eine Folge

$$
\begin{aligned}
r_0 := a &= q_2 \cdot b + r_2 && \text{, mit } 0 < r_2 < b, q_2, r_2 \in \mathbb{N}_0 \\
r_1 := b &= q_3 \cdot r_2 + r_3 && \text{, mit } 0 < r_3 < r_2, q_3, r_3 \in \mathbb{N}_0 \\
r_2 &= q_4 \cdot r_3 + r_4 && \text{, mit } 0 < r_4 < r_3, q_4, r_4 \in \mathbb{N}_0 \\
&\vdots \\
r_{m-3} &= q_{m-1} \cdot r_{m-2} + r_{m-1} && \text{, mit } 0 < r_{m-1} < r_{m-2} \qquad (*) \\
r_{m-2} &= q_m \cdot r_{m-1} + r_m && \text{, mit } 0 = r_m < r_{m-1}
\end{aligned}
$$

Dann gilt $r_{m-1}|a$ und $r_{m-1}|b$ sowie $\mathrm{ggT}(a,b)|r_{m-1}$.

Also $r_{m-1} = \mathrm{ggT}(a,b)$.

Rückwärtiges iteratives Ersetzen von $r_{m-2}, r_{m-3}, \ldots$ in Gleichung (*) entsprechend den vorhergehenden Gleichungen liefert die gewünschte Darstellung. □

Satz 126

Bezeichnet man mit $+_n$ und $\cdot_n$ die Addition bzw. Multiplikation modulo n, so gilt:

$$\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle \text{ ist ein Körper} \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ ist Primzahl} .$$

Beweis:

Die Axiome K1 und K3 sind durch die Addition und Multiplikation modulo n offensichtlich erfüllt. Wir haben bereits gesehen, dass a modulo n genau dann ein multiplikatives Inverses hat, wenn a und n teilerfremd sind, also

$$\mathrm{ggT}(a, n) = 1 .$$

Falls n prim ist, gilt dies für alle a, $1 \leq a < n$.
Umgekehrt kann $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ für alle a, $1 \leq a < n$ nur gelten, falls n prim ist. □

2.2 Multiplikative Gruppe endlicher Körper

Satz 127

In jedem endlichen Körper K ist die multiplikative Gruppe $K^* = K \setminus \{0\}$ zyklisch, d.h. es gibt ein Element $g \in K^*$ mit $K^* = \{1, g, g^2, \ldots, g^{|K|-2}\}$.

Beweis:

Es gilt: $\mathrm{ord}(a) < \infty$ für alle $a \in K^*$. Sei a ein Element in K^* mit maximaler Ordnung:

$$\max\{\mathrm{ord}(b) \mid b \in K^*\} = \mathrm{ord}(a) \ .$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{ord}(a) = |K| - 1$. Dazu betrachten wir das Polynom $x^{\mathrm{ord}(a)} - 1$, das Grad $\mathrm{ord}(a)$ hat.

Für jedes $b \in K^*$ gilt, dass $\mathrm{ord}(b) \mid \mathrm{ord}(a)$ (da sonst ab größere Ordnung als a hätte). Also ist jedes Element von K^* eine Nullstelle des obigen Polynoms. Da ein Polynom vom Grad k höchstens k verschiedene Nullstellen haben kann (warum? Siehe dazu später Satz 139), folgt daraus $\mathrm{ord}(a) \geq |K^*| = |K| - 1$. □

2.3 Primitive Elemente

Definition 128

Sei K ein endlicher Körper. Ein Element a, das die multiplikative Gruppe $K^* = K \setminus \{0\}$ erzeugt, nennt man primitives Element.

Beispiel 129

In $\mathbb{Z}_5^*$ sind sowohl 2 als auch 3 primitive Elemente:

$$\begin{array}{ll} 2^0 = 1 & 3^0 = 1 \\ 2^1 = 2 & 3^1 = 3 \\ 2^2 = 4 & 3^2 = 4 \\ 2^3 = 3 & 3^3 = 2 \\ (2^4 = 1 & 3^4 = 1) \end{array}$$

Bemerkung: $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4, 0, 1 \rangle$ ist kein Körper!

Beispiel 130

Setzt man $K = \{0, 1, a, b\}$ und definiert eine Addition und Multiplikation wie folgt:

$\oplus$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\odot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

so bildet $\langle K, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ einen Körper (Übung!).

3. Polynome

3.1 Definition und Grundlagen

Definition 131
Sei R ein (kommutativer) Ring. Ein Polynom über R in der Variablen x ist eine Funktion p der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in R$ und $a_n \neq 0$.
n heißt der Grad des Polynoms, $a_0, \ldots, a_n$ seine Koeffizienten.
Die Funktion p ordnet jedem Wert $x_0 \in R$ den Wert $p(x_0) \in R$ zu, ist also eine Funktion von R nach R.
$R[x]$ bezeichnet die Menge der Polynome über dem Ring R in der Variablen x.

Bemerkungen:

1. Das Nullpolynom $p(x) = 0$ hat Grad 0.
2. Formal kann das Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ auch mit der Folge $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ gleichgesetzt werden.

Beispiel 132

- $p(x) = x^2 - 2x + 1$ ist ein Polynom vom Grad 2.
- Eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ ist ein Polynom vom Grad 1.
- Konstante Funktionen $f(x) = c$ sind Polynome vom Grad 0.

Berechnung des Funktionswertes

Um den Wert eines Polynoms an einer bestimmten Stelle $x_0 \in R$ zu bestimmen, verwendet man am besten das sogenannte Hornerschema:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= ((\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ...)x + a_1)x + a_0. \end{aligned}$$

Hat man die Koeffizienten in einem Array $a[0..n]$ abgespeichert, kann man den Funktionswert $p(x_0)$ daher wie folgt berechnen:

```
begin
  p ← a[n]
  for i = n-1 downto 0 do
    p ← p · x_0 + a[i]
  end
  return(p)
end
```

Beobachtung:
Für die Auswertung eines Polynoms vom Grad n genügen damit $O(n)$ Multiplikationen und Additionen.

Addition

Die Summe zweier Polynome $a(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und $b(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ ist (sei o.B.d.A. $m \leq n$) definiert durch

$$(a+b)(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0, \quad \text{wobei } c_i = a_i + b_i \ .$$

Bemerkungen:

- An sich fehlende Koeffizienten sind gleich 0 gesetzt.
- Für den Grad des Summenpolynoms gilt

$$\mathrm{grad}(a+b) \leq \max\{\mathrm{grad}(a), \mathrm{grad}(b)\} \ .$$

Beispiel 133

1. Für $a(x) = x^2 - 3x + 5$ und $b(x) = 4x + 2$ ergibt sich $(a + b)(x) = x^2 + x + 7$. Hier gilt $\text{grad}(a + b) = 2 = \text{grad}(a)$.
2. Für $a(x) = x^3 + 1$ und $b(x) = -x^3 + 1$ ergibt sich hingegen $(a + b)(x) = 2$ und somit $\text{grad}(a + b) = 0 < 3 = \max\{\text{grad}(a), \text{grad}(b)\}$.

Beobachtung:
Die Summe (und natürlich auch die Differenz) zweier Polynome vom Grad $\leq n$ lässt sich in $O(n)$ arithmetischen Schritten berechnen.

Multiplikation

Das Produkt zweier Polynome $a(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und $b(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ erhält man durch Ausmultiplizieren und anschliessendes Sortieren und Zusammenfassen der Koeffizienten. Also

$$(a \cdot b)(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad \text{wobei } c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

Für den Grad des Produktpolynoms gilt

$$\operatorname{grad}(a \cdot b) = \operatorname{grad}(a) + \operatorname{grad}(b) \ ,$$

falls R nullteilerfrei sowie $a \neq 0 \neq b$ ist, ansonsten

$$\operatorname{grad}(a \cdot b) \leq \operatorname{grad}(a) + \operatorname{grad}(b) \ .$$

Beispiel 134

Für $a(x) = x^2 - 3x + 5$ und $b(x) = 4x + 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(a \cdot b)(x) &= (1 \cdot 4)x^3 + (1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4)x^2 + \\ &\qquad ((-3) \cdot 2 + 5 \cdot 4)x + 5 \cdot 2 \\ &= 4x^3 - 10x^2 + 14x + 10\,.\end{aligned}$$

Man sagt auch, dass die Koeffizienten

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

des Produktpolynoms durch Faltung der Koeffizientenfolgen von $a(x)$ und $b(x)$ entstehen.

Beobachtung:
Das Produkt zweier Polynome vom Grad $\leq n$ lässt sich in Zeit $O(n^2)$ berechnen.

Es gibt dafür aber auch schnellere Algorithmen!

Division

Für diesen Abschnitt setzen wir voraus, dass der Koeffizientenring ein Körper ist.

Betrachte das Schema

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^4 + x^3 + x + 3 \ \text{ div } \ x^2 + x - 1 \ = \ 2x^2 - x + 3 \\
\underline{-(2x^4 + 2x^3 - 2x^2)} & \\
 & -x^3 + 2x^2 + x + 3 \\
\underline{-(-x^3 - x^2 + x)} & \\
 & 3x^2 + 3 \\
\underline{-(3x^2 + 3x - 3)} & \\
 & -3x + 6
\end{array}
$$

Satz 135

Zu je zwei Polynomen $a(x)$ und $b(x)$, $b \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q(x)$ und $r(x)$, so dass

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x) \text{ und } r = 0 \text{ oder } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(b).$$

Beispiel 136

Im vorhergehenden Schema war das

$$\underbrace{2x^4 + x^3 + x + 3}_{a(x)} = \underbrace{(2x^2 - x + 3)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{b(x)} + \underbrace{(-3x + 6)}_{r(x)}$$

Beweis:
Gilt $\mathrm{grad}(a) < \mathrm{grad}(b)$, so kann man $q = 0$ und $r = a$ setzen. Sei also $\mathrm{grad}(a) \geq \mathrm{grad}(b)$.

Induktion über $\mathrm{grad}(a)$:
Ist $\mathrm{grad}(a) = 0$, so folgt aus $\mathrm{grad}(a) \geq \mathrm{grad}(b)$, dass a und b beides konstante Funtionen sind. Also $a(x) = a_0$ und $b(x) = b_0$ mit $b_0 \neq 0$. Wir können daher $q(x) = a_0/b_0$ und $r(x) = 0$ setzen.

Beweis (Forts.):

Ist $\text{grad}(a) = n > 0$ und $\text{grad}(b) = m$, $m \leq n$, und

$$\begin{aligned} a(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \\ b(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0 \end{aligned}$$

so setzen wir

$$\tilde{a}(x) = a(x) - (a_n/b_m)x^{n-m} \cdot b(x) \; .$$

Dann gilt $\text{grad}(\tilde{a}) < \text{grad}(a)$.

Nach Induktionsannahme gibt es daher Polynome $\tilde{q}(x)$ und $\tilde{r}(x)$ mit $\tilde{a}(x) = \tilde{q}(x) \cdot b(x) + \tilde{r}(x)$, mit $\tilde{r}(x) = 0$ oder $\text{grad}(\tilde{r}) < \text{grad}(b)$ (falls $m = n$, wird $\tilde{q}(x) = 0$ und $\tilde{r}(x) = \tilde{a}(x)$). Es gilt

$$a(x) \; = \; (a_n/b_m)x^{n-m}b(x) + \tilde{q}(x)b(x) + \tilde{r}(x) \; =: \; q(x)b(x) + r(x) \; .$$

Beweis (Forts.):

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an, es gäbe für Polynome a und b zwei Darstellungen wie im Satz angegeben. Also $q \cdot b + r = a = \hat{q} \cdot b + \hat{r}$ und somit auch

$$(q - \hat{q}) \cdot b = (r - \hat{r}).$$

Falls $q \neq \hat{q}$, ist die linke Seite ein Polynom vom Grad $\geq \mathrm{grad}(b)$. Da die rechte Seite aus der Differenz zweier Polynome vom Grad kleiner als $\mathrm{grad}(b)$ besteht, Widerspruch! Also ist $q = \hat{q}$ und damit auch $r = \hat{r}$.

□

Beobachtung:
Für zwei Polynome a und b von Grad höchstens n kann man die Polynome q und r aus Satz 135 wie im Beispiel bestimmen. Da sich der Grad des Polynoms in jeder Zeile verringert, benötigen wir also höchstens n Multiplikationen von Polynomen mit Konstanten und n Subtraktionen von Polynomen vom Grad höchstens n.

Insgesamt ergibt sich:

Die Division zweier Polynome vom Grad $\leq n$ lässt sich in Zeit $O(n^2)$ berechnen.

Beobachtung:
Falls der führende Koeffizient des Divisorpolynoms gleich 1 ist, lässt sich die Division auch über einem Ring R durchführen.

3.3 Nullstellen von Polynomen

Definition 137
Eine Nullstelle eines Polynoms p ist ein Wert x_0 mit $p(x_0) = 0$.

Lemma 138
Sei $p \in R[x]$, $x_0 \in R$ eine Nullstelle von p. Dann ist $p(x)$ ohne Rest durch $x - x_0$ teilbar.

Beweis:
Nach Satz 135 gibt es Polynome q und r mit $p(x) = q(x) \cdot (x - x_0) + r(x)$ und $\text{grad}(r) < \text{grad}(x - x_0) = 1$, also $\text{grad}(r) = 0$, d.h. $r(x) = r_0$. Wegen $p(x_0) = q(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + r_0 = r_0$ muss also r_0 gleich Null sein. D.h., $p(x) = q(x) \cdot (x - x_0)$. □

Satz 139 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $p \neq 0$ mit Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beweis:

Wir zeigen den Satz durch Induktion über den Grad des Polynoms. Ist p ein Polynom mit Grad 0, so ist die Aussage wegen der Annahme $p \neq 0$ offenbar richtig.
Ist p ein Polynom mit Grad $n > 0$, so hat p entweder keine Nullstelle (und die Aussage ist somit trivialerweise richtig) oder p hat mindestens eine Nullstelle a. Dann gibt es nach Lemma 138 eine Darstellung $p(x) = q(x) \cdot (x - a)$ mit $\mathrm{grad}(q) = n - 1$. Nach Induktionsannahme hat q höchstens $n - 1$ und somit p höchstens n Nullstellen. □

Beispiele 140

- Das Polynom $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ über $\mathbb{R}$ hat zwei Nullstellen $x = +1$ und $x = -1$ in $\mathbb{R}$.
- Das Polynom $x^2 + 1$ hat keine einzige reelle Nullstelle.
- Das Polynom $x^2 + 1$ hat die beiden komplexen Nullstellen $x = i$ und $x = -i$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet, also $i = \sqrt{-1}$.

Bemerkung: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, da jedes Polynom $\in \mathbb{C}[x]$ vom Grad ≥ 1 mindestens eine Nullstelle $\in \mathbb{C}$ hat; $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen.

3.4 Partialbruchzerlegung

Beispiel 141

Finde zu $\frac{g}{f} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}$ Polynome p, q mit $\operatorname{grad}(p) < 2$, $\operatorname{grad}(q) < 1$ und

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{p}{(x-1)^2} + \frac{q}{x-2}. \qquad (*)$$

Die r.S. von (*) heißt Partialbruchzerlegung von $\frac{g}{f}$.

Ansatz: $p(x) = ax + b$, $q(x) = c$.

$$\frac{p}{(x-1)^2} + \frac{q}{x-2} = \frac{(x-2)\cdot p + (x-1)^2 \cdot q}{(x-1)^2(x-2)}.$$

Durch Vergleich mit (*) erhält man

$$\begin{aligned} x^2+1 &= (ax+b)(x-2)+c(x-1)^2 \\ &= (a+c)x^2+(b-2a-2c)x+c-2b. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a+c &= 1 \\ b-2a-2c &= 0 \\ c-2b &= 1 \end{aligned}$$

Dieses hat die eindeutige Lösung $a=-4, \quad b=2, \quad c=5$. Somit gilt:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-4x+2}{(x-1)^2}+\frac{5}{x-2}.$$

Satz 142 (Partialbruchzerlegung)

Seien $f, g \in K[x]$ *(*$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*) Polynome mit* $\operatorname{grad}(g) < \operatorname{grad}(f)$*, und es gelte*

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_r)^{m_r}$$

mit $\mathbb{N} \ni m_i \geq 1$ *und paarweise verschiedenen* $\alpha_i \in K$ *(*$i = 1, \ldots, r$*). Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome* $g_1, \ldots, g_r \in K[x]$ *mit* $\operatorname{grad}(g_i) < m_i$*, so dass gilt:*

$$\frac{g}{f} = \frac{g_1}{(x - \alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{g_r}{(x - \alpha_r)^{m_r}}.$$

Beweis:
Induktion nach r. Für $r = 1$ ist nichts zu zeigen. Es gelte $r > 1$. Sei $\tilde{f} = (x - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_r)^{m_r}$. Dann gilt $f = (x - \alpha_1)^{m_1} \tilde{f}$. Sei $d = \mathrm{grad}(f)$ und $\tilde{d} = \mathrm{grad}(\tilde{f})$. Es genügt nun, Folgendes zu zeigen:
Zwischenbehauptung: Es gibt eindeutig bestimmte Polynome $A, B \in K[x]$ mit $\mathrm{grad}(A) < m_1$, $\mathrm{grad}(B) < \tilde{d}$, so dass

$$\frac{g}{f} = \frac{A}{(x - \alpha_1)^{m_1}} + \frac{B}{\tilde{f}} \tag{1}$$

gilt.
(Wendet man auf $\frac{B}{\tilde{f}}$ die Induktionsbehauptung an, so folgt die Behauptung des Satzes.)

Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$A\tilde{f} + B(x-\alpha_1)^{m_1} = g. \tag{2}$$

Wir machen den Ansatz: $A = \sum_{i=0}^{m_1-1} a_i x^i$, $B = \sum_{j=0}^{\tilde{d}-1} b_j x^j$.
Durch Koeffizientenvergleich mit (2) erhalten wir folgendes inhomogene lineare Gleichungssystem bestehend aus d Gleichungen in den Unbestimmten $a_{m_1-1}, \ldots, a_0, b_{\tilde{d}-1}, \ldots, b_0$:

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_{m_1-1} \\ \vdots \\ a_0 \\ b_{\tilde{d}-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{d-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

wobei M eine $d \times d$-Matrix ist, und $g = \sum_{i=0}^{d-1} c_i x^i$. Wir haben die Zwischenbehauptung bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Matrix M invertierbar ($\det M \neq 0$) ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 143

Seien $\tilde{A}, \tilde{B} \in K[x]$ *Polynome mit* $\operatorname{grad}(\tilde{A}) \geq 1$ *und* $\operatorname{grad}(\tilde{B}) \geq 1$. *Gibt es dann Polynome* $A, B \in K[x]$, $A \neq 0$ *oder* $B \neq 0$, *mit* $\operatorname{grad}(A) < \operatorname{grad}(\tilde{A})$, $\operatorname{grad}(B) < \operatorname{grad}(\tilde{B})$ *und*

$$A\tilde{B} + B\tilde{A} = 0,$$

so sind $\tilde{A}$ *und* $\tilde{B}$ *nicht teilerfremd.*

Beweis:

Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. □

Beweis (Forts.):

Nun zurück zum Beweis von Satz 142. Angenommen $\det(M) = 0$. Dann würde es einen Vektor $y = (a_{m_1-1}, \ldots, a_0, b_{\tilde{d}-1}, \ldots, b_0)^t \neq 0$ mit $M \cdot y = 0$ geben, d.h. es würde Polynome $A = \sum_{i=0}^{m_1-1} a_i x^i$ und $B = \sum_{j=0}^{\tilde{d}-1} b_j x^j$, $A \neq 0$ oder $B \neq 0$, geben mit $\mathrm{grad}(A) < m_1$, $\mathrm{grad}(B) < \tilde{d} = \mathrm{grad}(\tilde{f})$ und $A\tilde{f} + B(x - \alpha_1)^{m_1} = 0$.

Nach Lemma 143 wären dann $\tilde{f}$ und $(x - \alpha_1)^{m_1}$ nicht teilerfremd. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist Satz 142 bewiesen. □

3.5 Schnelle Fouriertransformation (FFT, DFT)

3.5.1 Grundlagen

Ein Polynom $P = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leq n$ ist eindeutig durch seine Koeffizienten a_i bestimmt, d.h. man hat eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Polynome} \in \mathbb{C}[x] \text{ vom Grad} \leq n\} &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ P_{\vec{a}} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &\mapsto \vec{a} = (a_0, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Problem: $P_{\vec{a}} \cdot P_{\vec{b}} = P_{\vec{c}}$ mit $\vec{c} = (c_0, \ldots, c_{2n})$, $c_k = \sum_i a_{k-i} b_i$, und die naive Berechnung von $\vec{c}$ benötigt $\Theta(n^2)$ Operationen.

Bemerkung: $\vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$ mit $c_k = \sum_i a_{k-i} b_i$ ist die Faltung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Es gibt noch eine weitere eindeutige Darstellung eines Polynoms.

Lemma 144
Seien $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ Polynome ($\in \mathbb{C}[x]$) vom Grad $\leq n$ und seien $\omega_0, \ldots, \omega_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Elemente. Dann gilt:

$$P = Q \iff P(\omega_i) = Q(\omega_i) \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, n.$$

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Klar.
„$\Leftarrow$“: Es gelte $P(\omega_i) = Q(\omega_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann ist jedes ω_i eine Nullstelle des Polynoms $P - Q$. Da $\mathrm{grad}(P - Q) \leq n$ gilt, folgt $P - Q = 0$ aus Satz 139. □

Man kann leicht zeigen, dass es zu jedem Tupel $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ (genau) ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leq n$ gibt, mit $f(\omega_i) = b_i$ für $i = 0, \ldots, n$ (z.B. das Newtonsche Interpolationspolynom, benannt nach Sir Isaac Newton (1643–1727)).

Somit erhalten wir eine weitere Bijektion:

$$\begin{aligned} \{\text{Polynome} \in \mathbb{C}[x] \text{ vom Grad} \leq n\} &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(\omega_0), \ldots, P(\omega_n)) \end{aligned}$$

Vorteil:

$$P \times Q \mapsto (P(\omega_0)Q(\omega_0), \ldots, P(\omega_n)Q(\omega_n)) = \\ (P(\omega_0), \ldots, P(\omega_n)) \cdot (Q(\omega_0), \ldots, Q(\omega_n)).$$

Multiplikation benötigt nur $O(n)$ Operationen. „$\cdot$“ auf der rechten Seite bezeichnet hier das komponentenweise (Hadamard) Vektorprodukt (Jacques S. Hadamard (1865–1963)).

Problem: Bijektion i.a. zu komplex.

Definition 145

Ein $\omega \in \mathbb{C}$ heißt primitive n-te Einheitswurzel, wenn $\omega^k \neq 1$ für alle $k = 1, \ldots, n-1$ und $\omega^n = 1$ gilt, d.h. $\mathrm{ord}(\omega) = n$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$.

Bemerkung: Es ist $\omega = e^{2i\pi/n}$ eine primitive n-te Einheitswurzel.

Definition 146

Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel, $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n,\omega}: \quad & \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \\ & \vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(\omega), \ldots, P_{\vec{a}}(\omega^{n-1})) \end{aligned}$$

heißt diskrete Fouriertransformation; wir schreiben auch kurz $\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}_{n,\omega}$.

Die Fouriertransformation ist nach Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) benannt.

Bemerkung: $\mathcal{F}$ is nach Lemma 144 und anschließender Bemerkung eine Bijektion.

Lemma 147
Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$ so, dass auch $\vec{a} * \vec{b} \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\mathcal{F}(\vec{a} * \vec{b}) = \mathcal{F}(\vec{a}) \cdot \mathcal{F}(\vec{b}).$$

Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\vec{a}) \cdot \mathcal{F}(\vec{b}) &= (P_{\vec{a}}(1)P_{\vec{b}}(1), P_{\vec{a}}(\omega)P_{\vec{b}}(\omega), \ldots, P_{\vec{a}}(\omega^{n-1})P_{\vec{b}}(\omega^{n-1})) \\
&= (P_{\vec{c}}(1), P_{\vec{c}}(\omega), \ldots, P_{\vec{c}}(\omega^{n-1})) \\
&= \mathcal{F}(\vec{c}), \quad \text{mit } \vec{c} = \vec{a} * \vec{b}.
\end{aligned}$$

□

Idee: Berechne $\vec{a} * \vec{b}$ vermöge $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\vec{a}) \cdot \mathcal{F}(\vec{b}))$. Die komponentenweise Multiplikation $F(\vec{a}) \cdot \mathcal{F}(\vec{b})$ benötigt nur $O(n)$ Operationen.

Jedoch: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung $\mathcal{F}(\vec{a}) = \Omega \cdot \vec{a}$, mit $\Omega = (\omega^{kl})_{0 \leq l,k \leq n-1}$. Die Matrixmultiplikation benötigt aber $\Omega(n^2)$ Operationen (also keine offensichtliche Verbesserung im Vergleich zur klassischen Polynom-Multiplikation)!

Ausweg: "Divide and Conquer"!!!

3.5.2 Berechnung der diskreten Fouriertransformation (FFT)

Sei $n = 2^k$ eine 2er-Potenz. Zerlege $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ in einen

geraden Anteil	$\vec{a}_g = (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$	und einen
ungeraden Anteil	$\vec{a}_u = (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$	

Dann gilt:

$$P_{\vec{a}}(x) = P_{\vec{a}_g}(x^2) + xP_{\vec{a}_u}(x^2)\,.$$

Beispiel 148

Sei $\vec{a} = (1, 2, 4, 8)$, also $P_{\vec{a}}(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3$. Damit ist $\vec{a}_g = (1, 4)$ und $\vec{a}_u = (2, 8)$, also

$$\begin{aligned} &P_{\vec{a}_g}(x^2) + xP_{\vec{a}_u}(x^2) \\ &\qquad = 1 \cdot (x^2)^0 + 4 \cdot (x^2)^1 + x \cdot (2 \cdot (x^2)^0 + 8 \cdot (x^2)^1) \\ &\qquad = 1 + 2 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 \end{aligned}$$

Lemma 149

Ist $\mathcal{F}_{\frac{n}{2},\omega^2}(\vec{a}_g) = (c_0, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1})$ *und* $\mathcal{F}_{\frac{n}{2},\omega^2}(\vec{a}_u) = (d_0, \ldots, d_{\frac{n}{2}-1})$*, so gilt* $\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ *mit*

$$\begin{aligned} e_i &= P_{\vec{a}}(\omega^i) \\ &= P_{\vec{a}_g}(\omega^{2i}) + \omega^i P_{\vec{a}_u}(\omega^{2i}) \\ &= c_i + \omega^i d_i \\ e_{\frac{n}{2}+i} &= P_{\vec{a}}(\omega^{\frac{n}{2}+i}) \\ &= P_{\vec{a}_g}(\omega^{2(\frac{n}{2}+i)}) + \omega^{\frac{n}{2}+i} P_{\vec{a}_u}(\omega^{2(\frac{n}{2}+i)}) \\ &= c_i + \omega^{\frac{n}{2}+i} d_i \end{aligned}$$

für $i = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$.

Bem.: ω^2 ist primitive $\frac{n}{2}$-te Einheitswurzel. Natürlich ist $\omega^{2\frac{n}{2}} = 1$.

Dies liefert folgenden Divide-and-Conquer-Algorithmus:

DFT($\vec{a}$,ω)
  Eingabe: $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, $n = 2^k$, ω
  Ausgabe: $\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) = (e_0, \ldots, e_{n-1})$

  if $n = 1$ then $e_0 := a_0$
  else
    $\vec{a}_g := (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$
    $\vec{a}_u := (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
    $(c_0, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1})$:=DFT($\vec{a}_g, \omega^2$)
    $(d_0, \ldots, d_{\frac{n}{2}-1})$:=DFT($\vec{a}_u, \omega^2$)
    for $i = 0$ to $\frac{n}{2} - 1$ do
      $e_i := c_i + \omega^i d_i$
      $e_{\frac{n}{2}+i} := c_i + \omega^{\frac{n}{2}+i} d_i$
    endfor
  endif
  return$(e_0, \ldots, e_{n-1})$

Satz 150

Der Algorithmus DFT *berechnet* $\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a})$ *auf Eingabe* $n = 2^k$, $\vec{a}$, ω *in* $T(n) = O(n \log n)$ *Operationen.*

Beweis:

Aus dem Algorithmus erhält man folgende Rekursion

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

mit einer Konstante $c > 0$ und $T(1) = 1$. Mit $n = 2^k$ folgt

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^{k-1}) + cn = 2(2T(2^{k-2}) + cn/2) + cn \\ &= \ldots = 2^\ell T(2^{k-\ell}) + \ell cn \end{aligned}$$

Speziell für $\ell = k$ gilt $T(2^k) = kc2^k + 2^k T(1)$, und wir erhalten $T(2^k) = O(2^k k) = O(n \log n)$. □

3.5.3 Berechnung der inversen diskreten Fouriertransformation

Satz 151
Es gilt

$$\mathcal{F}_{n,\omega}^{-1} = \frac{1}{n}\mathcal{F}_{n,\omega^{-1}}.$$

Bemerkung: ω^{-1} ist ebenso eine primitive n-te Einheitswurzel.
Zum Beweis von Satz 151 benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 152
Ist ω eine primitive n-te Einheitswurzel, so gilt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = 0$$

für alle $k = 1, \ldots, n-1$.

Beweis:
Für jedes $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 1$, gilt $\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \frac{a^n-1}{a-1}$. Speziell für $a = \omega^k$ ist $a^n = \omega^{kn} = 1$, $(k = 1, \ldots, n-1)$. □

Nun zum Beweis von Satz 151.

Beweis:
Sei $\vec{e} = \mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) = (e_0, \ldots, e_{n-1})$. Wir zeigen, dass gilt:

$$\frac{1}{n}\mathcal{F}_{n,\omega^{-1}}(\vec{e}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned} P_{\vec{e}}(\omega^{-k}) &= \sum_{j=0}^{n-1} e_j \omega^{-kj} = \sum_{j=0}^{n-1} P_{\vec{a}}(\omega^j)\omega^{-kj} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ij}\omega^{-kj} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(i-k)j} = na_k, \end{aligned}$$

denn nach Lemma 152 ist $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(i-k)j} = 0$, falls $i \neq k$.
Im Fall $i = k$ gilt $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(i-k)j} = n$. □

3.6 Restklassen in Polynomringen

3.6.1 Einführung und Definitionen

Der Begriff der Restklasse stammt ursprünglich aus der Teilbarkeitslehre in $\mathbb{Z}$;
($\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist ein kommutativer Ring).

Definition 153
Sei n eine fest gewählte ganze Zahl $\neq 0$. Für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$ heißt die Menge

$$[\ell]_n := \{m \in \mathbb{Z} : m - \ell \text{ ist durch } n \text{ teilbar}\}$$

die Restklasse von ℓ modulo n.

Bemerkungen

1. Für $\ell, m \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$m \in [\ell]_n \iff m \bmod n = \ell \bmod n\,.$$
Gilt $m \in [\ell]_n$, so schreibt man auch $m \equiv \ell \bmod n$ oder $m = \ell \bmod n$ und spricht „m kongruent ℓ modulo n“.
2. Es gilt $[\ell]_n = \{\ell + kn : k \in \mathbb{Z}\} =: \ell + n\mathbb{Z} =: \ell + (n)$.
3. Da es genau n verschiedene Reste $0, 1, \ldots, n-1$ gibt, gibt es auch genau n verschiedene Restklassen $[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n$.

Bemerkungen

4. Kongruenz modulo n definiert auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation $\sim_n$: $m \sim_n \ell :\iff n$ teilt $m - \ell$, und $[\ell]_n$ ist die Äquivalenzklasse von ℓ.
5. Auf der Menge aller Restklassen $[\ell]_n$ kann man Addition und Multiplikation wie folgt definieren

$$[\ell]_n +_n [m]_n := [\ell + m]_n, \qquad [\ell]_n \cdot_n [m]_n := [\ell \cdot m]_n,$$

   und erhält einen kommutativen Ring; er heißt der Restklassenring $\mathbb{Z}$ modulo n und wird mit $\mathbb{Z}/(n)$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_n$ bezeichnet.
6. Die Abbildung $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle$, $\ell \mapsto$ „Rest der Division von ℓ durch n“ ist ein Ringhomomorphismus.

Restklassen können auch im Polynomring $K[x]$ (K ein Körper) gebildet werden.

Definition 154

Sei $g \in K[x]$ ein Polynom, $\text{grad}(g) \geq 1$. Für jedes $f \in K[x]$ heißt die Menge

$$[f]_g := \{h \in K[x] : h - f \text{ ist durch } g \text{ teilbar}\}$$

die Restklasse von f modulo g.

Bemerkung: Wie in $\mathbb{Z}$ gilt nun auch im Polynomring $K[x]$:

1. $h \in [f]_g \iff h$ und f haben bei Polynomdivision durch g denselben Rest.
2. $[f]_g = \{f + hg \ : \ h \in K[x]\} =: f + (g)$ mit $(g) := \{hg : h \in K[x]\}$ = Menge aller Polynome, die durch g teilbar sind.

3. „Kongruenz modulo g“ definiert auf $K[x]$ eine Äquivalenzrelation $\sim_g$: $h \sim_g f \iff h - f$ ist durch g teilbar, und $[f]_g$ ist die Äquivalenzklasse von f.
4. Auf der Menge aller Restklassen $[f]_g$ kann man Addition und Multiplikation wie folgt definieren

$$[f]_g + [h]_g := [f + h]_g, \qquad [f]_g \cdot [h]_g := [f \cdot h]_g,$$

und erhält einen kommutativen Ring; er heißt der Restklassenring $K[x]$ modulo g und wird mit $K[x]/(g)$ bezeichnet.

3.6.2 Eigenschaften von Restklassenringen

Teilt man Polynome durch ein fest gewähltes Polynom g, $\mathrm{grad}(g) \geq 1$, so treten als Reste sämtliche Polynome vom Grad $< d = \mathrm{grad}(g)$ auf. Deshalb setzen wir

$$K[x]_d := \{h \in K[x] : \mathrm{grad}(h) < d\},$$

und definieren auf $K[x]_d$ Addition $+_g$ und Multiplikation $\cdot_g$ wie folgt:

Mit $Rem(f)$ bezeichnen wir den Rest der Polynomdivision von f durch g.

$$f +_g h := f + h, \qquad f \cdot_g h := Rem(f \cdot h).$$

Man prüft leicht nach, dass $(K[x]_d, +_g, \cdot_g)$ ein kommutativer Ring ist.

Satz 155

Sei $g \in K[x]$ ein Polynom, $d = \mathrm{grad}(g) \geq 1$. Dann ist die Abbildung

$$(K[x]/(g), +, \cdot) \to (K[x]_d, +_g, \cdot_g), \quad [f]_g \mapsto Rem(f)$$

ein Ringisomorphismus, die Umkehrabbildung ist gegeben durch $r \mapsto [r]_g$.

Beweis:

Es gilt

1. $$[f]_g = [0]_g \iff g|f \iff Rem(f) = 0$$

2. $$[f]_g + [h]_g = [f+h]_g \mapsto Rem(f+h) = Rem(f) + Rem(h) = Rem(f) +_g Rem(h)$$

3. $$[f]_g \cdot [h]_g = [f \cdot h]_g \mapsto Rem(f \cdot h) = Rem(Rem(f) \cdot Rem(h)) = Rem(f) \cdot_g Rem(h).$$

Aus (1) - (3) folgt, dass obige Abbildung wohldefiniert, injektiv und ein Ringhomomorphismus ist; sie ist auch surjektiv, denn für $f \in K[x]_d$ ist $Rem(f) = f$. □

Satz 156

Sei K ein Körper mit n Elementen, und sei $g \in K[x]$, $d = \mathrm{grad}(g) \geq 1$. Dann besitzt $K[x]/(g)$ genau n^d Elemente.

Beweis:

Nach Satz 155 ist $|K[x]/(g)| = |K[x]_d|$, und offensichtlich gilt $|K[x]_d| = n^d$. □

Definition 157

Ein Polynom $g \in K[x]$ heißt irreduzibel, falls $\mathrm{grad}(g) \geq 1$ gilt und aus $g = g_1 \cdot g_2$ mit $g_1, g_2 \in K[x]$ stets $\mathrm{grad}(g_1) = 0$ oder $\mathrm{grad}(g_2) = 0$ folgt; ansonsten heißt g reduzibel.

Satz 158

Sei $g \in K[x]$, $\mathrm{grad}(g) \geq 1$. Dann gilt:

$$K[x]/(g) \text{ ist ein Körper } \Leftrightarrow g \text{ ist irreduzibel.}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $K[x]/(g)$ ein Körper. Angenommen, g ist nicht irreduzibel. Dann gibt es $g_1, g_2 \in K[x]$ mit $g = g_1 \cdot g_2$ und $\mathrm{grad}(g_1), \mathrm{grad}(g_2) \geq 1$.
Da $d := \mathrm{grad}(g) = \mathrm{grad}(g_1) + \mathrm{grad}(g_2)$, folgt $\mathrm{grad}(g_1) < d$ und $\mathrm{grad}(g_2) < d$.
Also gilt $[g_1]_g \neq [0]_g$ und $[g_2]_g \neq [0]_g$. Jedoch ist

$$[g_1]_g \cdot [g_2]_g = [g_1 g_2]_g = [g]_g = [0]_g \ ,$$

d.h. $[g_1]_g$ und $[g_2]_g$ sind Nullteiler. In einem Körper gibt es jedoch keine Nullteiler (vgl. Satz 123).

Beweis (Forts.):

"$\Leftarrow$" Sei g irreduzibel, und sei $[f]_g \neq [0]_g$ gegeben.
$[f]_g \neq [0]_g$ bedeutet, dass f nicht durch g teilbar ist. Da g irreduzibel ist, sind f und g daher teilerfremd.
Somit existieren Polynome $p, q \in K[x]$ mit $pf + qg = 1$, und es folgt

$$\begin{aligned} [p]_g \cdot [f]_g &= [pf]_g = [1 - qg]_g = [1]_g - \underbrace{[qg]_g}_{=[0]_g} \\ &= [1]_g \, . \end{aligned}$$

Also ist $[p]_g = ([f]_g)^{-1}$.

□

3.7 Konstruktion endlicher Körper

Satz 159

*Zu jeder Primzahl p und zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es einen endlichen Körper mit p^n Elementen; dieser wird mit $GF(p^n)$ bezeichnet (GF = **G**alois **F**ield, nach Evariste Galois (1811–1832)).*

Beweis:

$n = 1$: $\mathbb{Z}_p = GF(p)$ ist ein Körper mit p Elementen.

$n > 1$: Sei $K = \mathbb{Z}_p$. Sei $g \in K[x]$ ein *irreduzibles* Polynom vom Grad n (zur Existenz eines solchen Polynoms: siehe Bemerkung unten).
Nach Satz 158 ist $K[x]/(g)$ ein Körper, und nach Satz 156 hat $K[x]/(g)$ genau p^n Elemente.

□

Satz 160

Je zwei endliche Körper mit p^n Elementen sind isomorph.

Beweis:

siehe geeignetes Textbuch zur Algebra oder Zahlentheorie, ebenfalls bzgl. der Existenz irreduzibler Polynome! □

Beispiel 161

Wir betrachten den Fall $K = \mathbb{Z}_3 = GF(3)$ und $p(x) = x^2 + 1$.

Der Ring $\mathbb{Z}_3[x]/(p)$ besteht also aus allen Polynomen in $\mathbb{Z}_3[x]$ vom Grad ≤ 1:

$$\mathbb{Z}_3[x]/(p) = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\} .$$

Bemerkung zur Notation: Wir schreiben hier (und auch sonst) das Polynom f statt der Restklasse $[f]_g$.

Das Polynom p ist irreduzibel. Wieso?

Beispiel 162

Für $K = \mathbb{Z}_2 = GF(2)$ und $p(x) = x^2 + x + 1$ gilt in ähnlicher Weise

$$\mathbb{Z}_2[x]/(p) = \{0, 1, x, x+1\} .$$

Für die Addition und Multiplikation modulo p ergibt sich

$+_p$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Aus diesen beiden Tabellen folgt, dass $\mathbb{Z}_2[x]/(p)$ mit den angegebenen Verknüpfungen $+_p$ und $\cdot_p$ einen Körper mit 4 Elementen bildet (den wir schon früher gesehen haben).

Beispiel 163

Für $K = \mathbb{Z}_2$ und $q(x) = x^2 + 1$ gilt wiederum

$$\mathbb{Z}_2[x]/(q) = \{0, 1, x, x+1\} .$$

Für die Addition und Multiplikation modulo q ergibt sich nunmehr jedoch

$+_q$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot_q$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	1	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

Aus der zweiten Tabelle folgt, dass $\mathbb{Z}_2[x]/(q) \setminus \{0\}$ bzgl. $\cdot_q$ keine Gruppe bildet. Der Grund ist, dass q nicht irreduzibel ist.

3.8 Redundante Datenspeicherung und Fehlerkorrektur

Seien natürliche Zahlen k, t und s so gewählt, dass

$$k + 2t \leq 2^s - 1 \; .$$

Sei weiter $K = GF(2^s)$, und seien $c_0, \ldots, c_{k-1} \in K$. Wir fassen die c_i sowohl als Elemente von K als auch (in frei festzulegender, eindeutiger Weise) als *Binärwörter der Länge* s auf.

Sei weiter α ein primitives Element in $K = GF(2^s)$ (existiert nach Satz 127) und seien

$$
\begin{aligned}
g(x) &:= \prod_{i=1}^{2t}(x-\alpha^i)\ , \\
c(x) &:= \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i\ , \text{ und} \\
d(x) = \sum_{i=0}^{k+2t-1} d_i x^i &:= g(x)\cdot c(x)\ .
\end{aligned}
$$

Wir sagen, dass der Vektor der Koeffizienten von $d(x)$ den Vektor $(c_0, \ldots, c_{k-1})$ kodiert (Reed-Solomon-Code $RS(s,k,t)$).

Satz 164

Für jedes $s \in \mathbb{N}$ und $k, t \in \mathbb{N}$ mit $k + 2t \leq 2^s - 1$ ist der Reed-Solomon-Code $RS(s, k, t)$ t-fehlerkorrigierend und $2t$-fehlererkennend.

Das bedeutet, dass, falls bei der Übertragung des Vektors der d_i nicht mehr als $2t$ der d_i's verändert werden, dies erkannt werden kann. Werden höchstens t der d_i's verändert, so können die ursprünglichen d_i's sogar rekonstruiert werden.

Beweis:

Sei $(f_0, \ldots, f_{k+2t-1})$ der sich nach der Übertragung ergebende Code-Vektor, sei $e_i := f_i - d_i$ für $i = 0, \ldots, k + 2t - 1$, und seien

$$e(x) := \sum_{i=0}^{k+2t-1} e_i x^i \text{ und } f(x) := \sum_{i=0}^{k+2t-1} f_i x^i \ .$$

Dann gilt $f(x) = d(x) + e(x)$, und es folgt

$$f(\alpha^i) = e(\alpha^i) \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq 2t \ .$$

Beweis (Forts.):

In Matrixschreibweise sieht dies wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{k+2t-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{2(k+2t-1)} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \dots & \alpha^{3(k+2t-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{2t} & \alpha^{4t} & \alpha^{6t} & \dots & \alpha^{2t(k+2t-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{k+2t-2} \\ e_{k+2t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\alpha^2) \\ f(\alpha^3) \\ \vdots \\ f(\alpha^{2t}) \end{pmatrix} .$$

Falls nur $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$ ungleich 0 sind, fallen Spalten weg und es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \alpha^{i_1} & \alpha^{i_2} & \dots & \alpha^{i_r} \\ \alpha^{2i_1} & \alpha^{2i_2} & \dots & \alpha^{2i_r} \\ \alpha^{3i_1} & \alpha^{3i_2} & \dots & \alpha^{3i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{2ti_1} & \alpha^{2ti_2} & \dots & \alpha^{2ti_r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \\ e_{i_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\alpha^2) \\ f(\alpha^3) \\ \vdots \\ f(\alpha^{2t}) \end{pmatrix} .$$

Beweis (Forts.):

Immer wenn die Anzahl r der Spalten $\leq$ der Anzahl $2t$ der Zeilen ist, hat diese Matrix vollen Spaltenrang (Vandermonde-Matrix).

- Wenn $(e(\alpha^i) =)\ f(\alpha^i) = 0$ für $i = 1, \ldots, 2t$, dann ist $e_i = 0$ für alle i eine Lösung, und zwar dann die einzige (Spaltenrang).
- Falls $\leq t$ Fehler aufgetreten sind, können wir entsprechende e_{i_j} eindeutig bestimmen (z.B. durch Probieren) und damit die d_i rekonstruieren.

□

4. Die elementaren Zählfunktionen

4.1 Untermengen

Definition 165 (Binomialkoeffizienten)

$$\binom{n}{0} := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\binom{n}{k} := 0 \qquad n < k, n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{sonst} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

Satz 166

Sei N eine Menge mit $|N| = n$ Elementen. Die Menge aller k-elementigen Untermengen von N wird bezeichnet mit

$$\binom{N}{k}.$$

Es gilt:

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k} = \binom{n}{k}.$$

Beweis:

Seien $n, k \geq 0$, $a \in N$.

1. $\binom{n}{0}$ und $k > n$ sind klar.
2. Definiere

$$S_a := \left\{ A \in \binom{N}{k};\ a \in A \right\},$$

$$\tilde{S}_a := \left\{ A \in \binom{N}{k};\ a \notin A \right\}.$$

Beweis (Forts.):

3. Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k}, \quad S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1} \quad \text{(per Induktion)}$$

$$|\tilde{S}_a| = \left|\binom{N \setminus \{a\}}{k}\right| = \binom{n-1}{k} \quad \text{(per Induktion)}$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□

Zwischenbemerkung zur Nomenklatur:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)$$

4.2 Partitionen von Mengen und Zahlen

4.2.1 Ungeordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Sei N eine Menge der Kardinalität n und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Zerlegung von N in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen heißt eine k-Partition von N. Die einzelnen Teilmengen heißen auch Klassen. Ihre Anzahl wird mit

$$S_{n,k}$$

bezeichnet (die sog. Stirling-Zahlen der 2. Art).

Beispiel 167

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ k = 2$

$$\{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\} \qquad \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$$
$$\{2\} \cup \{1, 3, 4, 5\} \qquad \{1, 3\} \cup \{2, 4, 5\}$$
$$\{3\} \cup \{1, 2, 4, 5\} \qquad \{1, 4\} \cup \{2, 3, 5\}$$
$$\{4\} \cup \{1, 2, 3, 5\} \qquad \{1, 5\} \cup \{2, 3, 4\}$$
$$\{5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \qquad \{2, 3\} \cup \{1, 4, 5\}$$
$$\{2, 4\} \cup \{1, 3, 5\}$$
$$\{2, 5\} \cup \{1, 3, 4\}$$
$$\{3, 4\} \cup \{1, 2, 5\}$$
$$\{3, 5\} \cup \{1, 2, 4\}$$
$$\{4, 5\} \cup \{1, 2, 3\}$$

$\Rightarrow S_{5,2} = 15.$

Weiter gilt: $S_{n,1} = 1, S_{n,2} =$ Übung, $S_{n,n} = 1.$

2. Zahlpartitionen

Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

mit $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$.

Eine solche Zerlegung heißt k-Partition der Zahl n.

Die Anzahl aller k-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ wird mit

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

Beispiel 168

$n = 8$, $k = 4$.

$$
\begin{aligned}
8 &= 5 + 1 + 1 + 1 \\
&= 4 + 2 + 1 + 1 \\
&= 3 + 3 + 1 + 1 \\
&= 3 + 2 + 2 + 1 \\
&= 2 + 2 + 2 + 2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow P_{8,4} = 5$

4.2.2 Geordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Seien N, n, k wie vorher. Eine (beliebig) *geordnete* k-Menge $\subseteq N$ heißt k-Permutation aus N. Ihre Anzahl ist

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}}$$

(„n hoch k fallend“, „fallende Fakultät“).

Analog:

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)$$

Überlegung: Jede k-Menge aus N ergibt $k!$ k-Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k-Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k-Mengenpartitionen (Die Klassen sind (beliebig) *untereinander* geordnet, aber nicht *in* sich!).

2. Zahlpartitionen

Eine geordnete Zahlpartition ist gegeben durch

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet|\bullet|\bullet|\bullet\cdots\bullet|\bullet|\bullet|\bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt.

Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

4.3 Multimengen

Beispiel 169

$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \qquad |M| = 7$

Satz 170

Die Anzahl der k-Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N ($|N| = n$) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!}.$$

Beweis:
Sei o.B.d.A. $N = \{1, \ldots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ der Kardinalität k. Sei o.B.d.A. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Definiere die Ersetzung f:

$$f: \quad \begin{array}{ll} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 + 1 \\ a_3 & a_3 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k & a_k + k - 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} & \geq 1 \\ & \\ & \\ & \\ & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Ergebnis unter f ist eine *Menge* $\subseteq [n + k - 1]$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. □

Andere Beweisvariante:

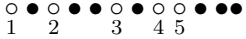
Beweis:

Von $n+k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste.

Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). □

Beispiel 171

Darstellung zu obigem Beispiel:



Zugehörige Multimenge:

$$\{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\}$$

4.4 Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (Urbildraum) nach R (Bildraum), $|N| = n, |R| = r$ mit $n, r \in \mathbb{N}_0$.
Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ ist

$$r^n \ .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ ist

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ („geordnete r-Mengenpartitionen von N“) ist

$$r! \cdot S_{n,r}.$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r \,.$$

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($n = r$)
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\bar{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

4.6 Abzählen von Permutationen

4.6.1 Stirling-Zahlen der ersten Art

Definition 172
Die Stirling-Zahl der ersten Art

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Zyklen an.

Einfache Beobachtungen:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$$

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

4.6.2 Typ einer Permutation

Definition 173

Sei π eine Permutation von n Objekten, $b_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge i $(i = 1, \ldots, n)$ und $b(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π, also

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i(\pi) = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \ldots n^{b_n(\pi)}$$

der Typ von π (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).

Beispiel 174

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1\ 8\ 3)$$

als Funktionswerte

$$= (1\ 4\ 2\ 5\ 7\ 8\ 3\ 6)$$

in Zyklenschreibweise

Typ: 8^1

Beispiel 175

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 7\ 1\ 6\ 5\ 3\ 8)$$

$$= (1\ 2\ 4)\ (3\ 7)\ (5\ 6)\ (8)$$

Typ: $1^1\ 2^2\ 3^1$

Lemma 176
Es gibt

$$\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}$$

verschiedene Typen von Permutationen in S_n.

Beweis:
Klar. □

Lemma 177

Es gibt

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

verschiedene Permutationen in S_n vom Typ $1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}$ (Beachte: $0! = 1$). Insbesondere gilt:

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{N}_0{}^n \\ \sum b_i = k \\ \sum i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

und

$$n! = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{N}_0{}^n \\ \sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}.$$

Beweis:
Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\sqcup)(\sqcup)\dots(\sqcup)}^{b_1}\overbrace{(\sqcup\sqcup)(\sqcup\sqcup)\dots(\sqcup\sqcup)}^{b_2}\dots\overbrace{(\sqcup\sqcup\sqcup\dots\sqcup)}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten.
Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor überzählt werden. □

Beispiel 178

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

4.7 Abzählkoeffizienten

4.7.1 Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1. $$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \qquad \forall n \geq k > 0$$
   $$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall n > 0$$
2. $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n \geq k > 0$$
3. $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \forall n \geq k > 0$$

Weiter definiert man:

1. $$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{C}$$

2. $$\binom{0}{0} := 1$$

3. $$x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)$$
$$x^{\overline{k}} = x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1) \qquad \forall x \in \mathbb{C},\ k \geq 0$$

4. $$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 179

$\binom{x}{k}$ *ist, für* $k \geq 0$, *ein Polynom in* x *vom Grad* k, *und es gilt auch für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *und* $x \in \mathbb{C}$

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

Beweis:

Da für $k \leq 0$ per Definition der Binomialkoeffizienten Gleichheit gilt, betrachten wir nur $k > 0$. Es ist dann

$$\binom{x}{k} - \left[\binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}\right]$$

ein Polynom in x vom Grad $\leq k$. Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist dieses Polynom gleich 0. Ein Polynom einer Variablen mit unendlich vielen Nullstellen ist aber sicher identisch 0 (Fundamentalsatz der Algebra (Satz 139)).

Beweis (Forts.):

Eine weitere Möglichkeit, den Beweis zu führen:

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} = (k+x-k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-1)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

□

Das Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1	0	
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

benannt nach Blaise Pascal (1623–1662).

Beobachtung:
Die Zeilensumme in der n-ten Zeile ist 2^n.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Lemma 180

Für die Spaltensumme bis zur n-ten Zeile gilt:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \forall n, k \geq 0$$

Beweis:

(Vollständige Induktion über n)
Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{m=0}^{0} \binom{m}{k} = \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\stackrel{!}{=} \binom{0+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n+1}\binom{m}{k} &= \sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}\end{aligned}$$

□

Beispiel 181

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$k = 2, n = 5$:

$$\sum_{m=0}^{5} \binom{m}{2} = \binom{6}{3}$$

Lemma 182

Für die Diagonalsumme gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{C}$$

Beweis:

(Vollständige Induktion über m)
Induktionsanfang: $m = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1$$
$$\stackrel{!}{=} \binom{0+n+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss $m \mapsto m+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} + \binom{m+n+1}{m+1} \\
&= \binom{m+n+1}{m} + \binom{m+n+1}{m+1} \\
&= \binom{m+n+2}{m+1}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 183

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$m = 3, n = 2$:

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{2+k}{k} = \binom{6}{3}$$

Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k \cdot x^{\overline{k}}$$

- Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Spezialfälle des Binomialsatzes:

1. $x = y = 1$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(Beweis zur Zeilensumme!)

2. $y = 1$:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

3. $x = -1, y = 1$ ($n = 0$ klar; sei also $n > 0$):

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Satz 184 (Vandermonde-Identität)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \cdot \binom{y}{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$$

Beweis:

Seien zunächst $x, y \in \mathbb{N}$.
Zur Verdeutlichung sei z. B. x die Anzahl der Wahlmänner der Demokraten und y die Anzahl der Wahlmänner der Republikaner. $\binom{x+y}{n}$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, aus $(x+y)$ Wahlmännern n auszuwählen. Dementsprechend ist $\binom{x}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus x Demokraten k auszuwählen, und $\binom{y}{n-k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus y Republikanern $(n-k)$ auszuwählen.
Damit überlegt man sich leicht, dass die Formel für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis (Forts.):

Erweiterung auf $x, y \in \mathbb{C}$: Setze $y =$ const. Damit stehen links und rechts ein Polynom n-ten Grades in x:

$$p_l(x) \stackrel{!}{=} p_r(x)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$p_l(x) - p_r(x) = 0$$

Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist dann

$$p_l(x) - p_r(x) \equiv 0$$

Das heißt, $p_l(x)$ und $p_r(x)$ sind identisch. □

4.7.2 Stirling-Zahlen der ersten Art

Lemma 185

Mit den zusätzlichen Festlegungen

$$s_{0,0} = 1$$

und

$$s_{n,k} = 0 \quad k \leq 0, n > 0$$

gilt:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \qquad \forall n, k > 0 \; .$$

Beweis:

Für Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ mit k Zyklen gilt:

Entweder: n bildet einen Zyklus der Länge 1:

$$\pi = \underbrace{(* \cdots *)(* \cdots *) \ldots}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1, \ldots, n-1\} \\ \text{mit } (k-1) \text{ Zyklen}}} (n)$$

Dafür gibt es $s_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.

Beweis (Forts.):

Oder: n ist in einem Zyklus der Länge ≥ 2 enthalten.
Streiche n aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*^{\downarrow}\cdots *^{\downarrow})(*^{\downarrow}\cdots *^{\downarrow})\ldots(*^{\downarrow}\cdots *^{\downarrow})}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die $^{\downarrow}$ bezeichnen Stellen, an denen n gestrichen worden sein könnte (immer hinter der jeweiligen Zahl, da $({}^{\downarrow}*\cdots *)$ zyklisch mit $(*\cdots *^{\downarrow})$ identisch ist). Dafür gibt es $n-1$ mögliche Stellen.
Damit ergeben sich hier $(n-1)s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.
Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. □

Stirling-Dreieck der ersten Art

$s_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \qquad \forall n, k > 0$$

Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right] .$$

Beweis:
(Vollständige Induktion)
Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^{\underline{0}} = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n) \cdot x^{\underline{n}} \\
&\overset{\text{IA}}{=} (x-n) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \Big(s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k} \Big) \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k
\end{aligned}
$$

□

4.7.3 Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma 186

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \,.$$

Beweis:

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt

entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \cdots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1, \ldots, n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten

Beweis (Forts.):

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1,\ldots,n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:
$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. □

Stirling-Dreieck der zweiten Art

$S_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

Einige Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
S_{n,1} &= 1 \\
S_{n,2} &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2} \\
S_{n,n} &= 1
\end{aligned}
$$

Bemerkung:
Es gibt auch andere Notationen für die Stirling-Zahlen zweiter Art, z. B.:

$$S_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

z. B. in Graham, Knuth, Pataschnik: Concrete Mathematics

4.7.4 Auflistung von Permutationen

Definition 187

Seien $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \cdots\ \pi_n)$ und $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_n)$ zwei Permutationen aus S_n, $\pi \neq \sigma$, als Wertevektor geschrieben (d.h. $\pi_i = \pi(i)$ etc.). Dann heißt π lexikographisch kleiner als σ, geschrieben $\pi < \sigma$, genau dann, wenn

$$(\exists 1 \leq k \leq n)(\forall 1 \leq i < k)\Big[(\pi_i = \sigma_i) \wedge (\pi_k < \sigma_k)\Big] .$$

Beispiel 188

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

Gegeben: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

```
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix ∘ a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix ∘ k, N\{k})
    od
  fi
end
```

Aufruf: appendlexlist(λ, N)

Beispiel 189

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

4.7.5 Auflistung von Teilmengen

Sei $N = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $|N| = n$.

Definition 190

Seien $A, B \subseteq N$, $A \neq B$. Dann heißt A lexikographisch kleiner als B, geschrieben $A < B$, wenn

$$\max\{A \triangle B\} \in B$$

Beispiel 191

$N = \{0, 1, 2\}$;

$$2^N = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1, 0\}, \{2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 1, 0\}\big\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

1. $N = \{0, \ldots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
2. Sei $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0} = \Big\{k \in N \colon 0 \leq k \leq n-1 \wedge a_k = 1\Big\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung, zweite Variante:

Sei $n \in \mathbb{N}$.

```
appendlexlist(set praefix, nat n)
  for k = 0, 1 do
    if k = 1 then praefix:=praefix ∪ {n} fi
    if n = 0 then print(praefix)
    else
      appendlexlist(praefix, n − 1)
    fi
  od
end
```

Aufruf: appendlexlist($\emptyset$, $n-1$)

4.7.6 Gray-Codes

Definition 192

Ein Gray-Code $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Permutation $(g_0, \ldots, g_{2^n-1})$ der Wörter in $\{0,1\}^n$, so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter g_i und g_{i+1}, für alle $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, in genau einer Position unterscheiden.
$GC(n)$ heißt zyklischer Gray-Code, falls die Bedingung auch für g_{2^n-1} und g_0 gilt.

$$GC(1) := (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1)$$
$$GC(n+1) := \big(0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \ldots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \ldots, 1 \cdot g_{n,0}\big)$$

Beispiel 193

$$GC(3) = (000\ 001\ 011\ 010\ 110\ 111\ 101\ 100)$$

Lemma 194

1. $GC(n)$ *hat Länge* 2^n.
2. $\{g_{n,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\} = \{0,1\}^n$.
3. *für alle* k *unterscheidet sich* $g_{n,k}$ *von* $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ *in genau einem Bit.*

Beweis:

Folgt direkt aus der Definition. □

4.8 Summation und Differenzenoperator

4.8.1 Direkte Methoden

1. Indextransformation:

Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

Beispiel 195

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \cdots + n \cdot a = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n - k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n - k) \cdot a$$

Beispiel (Forts.)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} k \cdot a + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a \right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a = \binom{n+1}{2} \cdot a \end{aligned}$$

2. Induktion

Beispiel 196

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 4 \qquad S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

Beispiel (Forts.)

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ *trivial*

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n+1) - 1 \overset{\text{IA}}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2$$

Beispiel 197

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beispiel (Forts.)

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ *trivial,* $n = 2$ *durch Einsetzen:*

$$\begin{aligned}(G \leq A) &\iff \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}\right) \\ &\iff \left(4a_1 \cdot a_2 \leq (a_1 + a_2)^2\right) \\ &\iff \left(0 \leq {a_1}^2 - 2a_1a_2 + {a_2}^2 = (a_1 - a_2)^2\right)\end{aligned}$$

Induktionsschluss:
Wir zeigen:
$(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{n+1}$
Sei

$$b := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \ .$$

Es gilt:

Beispiel (Forts.)

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot b^{n-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot (a_{n+1} \cdot b^{n-1}) \\
&\overset{\mathsf{P_n}}{\leq} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)^n \\
&= \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)\right]^n \\
&\overset{\mathsf{P_2}}{\leq} \left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)\right)^2\right]^n \\
&= \left[\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + (n-1)b\right)\right]^{2n} \\
&= b^{2n}\,.
\end{aligned}
$$

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren! Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beispiel (Forts.)

1. *Sei*

$$b := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n \\
&= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n \\
\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i &\leq \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \quad \Rightarrow P_{n-1}
\end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

2. *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2n} a_i &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right) \\
&\overset{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n \\
&\overset{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n} \\
&\Rightarrow P_{2n}
\end{aligned}$$

□

4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt Translationsoperator.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ heißt (Vorwärts-)Differenzenoperator.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel 199

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \cdots \circ E)}_{a}(f)(x) = f(x+a)$$

Beobachtungen:
Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $$(P \pm Q)(f+g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$
2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$
3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$
4. $$\Delta^n = (E-I)^n = \underbrace{(E-I)\ldots(E-I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\ .\end{aligned}$$

Beweis:

Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0-2+8 = 6$$

4.8.3 Fallende Fakultät

Definition 202

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$.

Damit für $n = -1$ „formal“:

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Lemma 203

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis:

(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} \\ &= (x+1) \cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1) \cdot x^{\underline{n-1}} \\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\
&= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}
\end{aligned}$$

□

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204

Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

Satz 205

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

□

Beispiel 206

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}} .$$

Dann ist (für $x \in \mathbb{N}$)

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 209

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot (n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot (n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}} \,,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 1) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.

Beispiel (Forts.)

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^{\underline{m}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} \,.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f) \; .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \\
&\quad \underbrace{-f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \; .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung zur Notation:
Bei der Darstellung

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).

Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta\binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}.\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 \,.
\end{aligned}
$$

Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k} .$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.

Beweis:
$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}} \,.$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \,.$$

□

Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} \cdot x^{\underline{i}} \, .$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n \big|_{x=0} = (E - I)^k x^n \big|_{x=0} \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i\Big) x^n \big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \, , \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \, .$$

4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215
Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt Basisfolge, falls

$$\deg(p_i) = i \qquad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.

Beobachtung: $\left(p_i(x)\right)_{i\geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. □

4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $\big(p_i(x)\big)_{i\geq 0}$ und $\big(q_i(x)\big)_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1. $$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Lemma 216

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ und $B = (b_{ij})_{0 \le i,j \le n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n+1$-dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:

Klar. □

Satz 217

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot u_k\right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot v_k\right]$$

Beweis:

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = \big(v_0, \ldots, v_n\big)^T = A \cdot u \text{ und } u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. □

4.9.3 Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$x^n = \big((x-1)+1\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x-1)^k$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$\left(v_k\right)_{k\geq 0} := \left(x^k\right)_{k\geq 0}$ und $\left(u_k\right)_{k\geq 0} := \left((x-1)^k\right)_{k\geq 0}$.

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Für „Puristen“: Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \text{ und}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Beispiel 218

Sei $d(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n,0)\ .$$

(Die Anzahl der sog. derangements).

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \overset{k\mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \,.$$

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219
Zu einer Folge $(a_i)_{i\geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i \ .$$

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} \big(a_i \pm b_i\big) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} \big(c \cdot a_i\big) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$)

Satz 220

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein multiplikatives Inverses genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.

Beweis:

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = {a_0}^{-1}$ sein.

Beweis (Forts.):

Seien induktiv $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n]\Big(A(z) \cdot B(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

$\big($dabei bezeichnet $[z^n](\ldots)$ den Koeffizienten von z^n in $(\ldots)\big)$ folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt. □

Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1 - z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1 - z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 \ldots.) - (z + z^2 + z^3 + \ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Satz 222

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1. $$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$
2. $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z}$$
3. $$\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$$

4. $$\sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}z^n = (1+z)^a, \quad a\in\mathbb{C}$$

5. $$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

6. $$\sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n}z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$$

7. $$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

8. $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1+z)$$

Beweis:

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-z)^n \\ &\overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m+1$.

□

Beispiel 223

Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n \geq m} a_{n-m} \cdot z^n \ .$$

Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \overset{\text{Folie 6(6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n \,.$$

$(*)$ *Das Gleichheitszeichen gilt, da für* $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$a_0 = 2$$
$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$
$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen $(a_0 = 2, a_1 = 6)$ ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Damit gilt

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

Beispiel (Forts.)

Man zeigt auch allgemein, dass

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad \textit{folgende Bedingung erfüllt:}$$
$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

$\big($also $(a_i)_{i\geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)\big)$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Satz 226

Sei $(q_1, q_2, \ldots, q_d)$ *eine gegebene Folge,* $q_i \in \mathbb{C}, d \geq 1, q_d \neq 0$. *Sei weiter*

$$q(z) := 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d$$

Das reflektierte Polynom dazu ist

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d$$

(Bemerkung: $q^R(z)$ *ist das charakteristische Polynom). Seien* $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$ *die verschiedenen Nullstellen von* q^R, *sei* d_i *die Vielfachheit von* α_i. *Damit ist*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\Big[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\Big]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome* g_i, $\deg(g_i) < d_i$ *für* $i = 1, \ldots, k$, *so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

4. **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome* p_i, $\deg(p_i) < d_i$, *so dass*

$$(\forall n \geq 0)\Big[f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n\Big]$$

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$
$$\dim(V_2) = d \text{ (p hat d frei wählbare Koeffizienten)}$$
$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (g_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)}$$
$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (p_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d) \cdot \sum_{n\geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit $\deg(p) \leq d-1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$. Betrachte für $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \ldots + f_n q_d = 0\,.$$

Damit gilt, dass

$$\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_1,$$

also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $\left(f_n\right)_{n\geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i} \ .$$

Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q(\frac{1}{z}),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) = \Big(q^R(z)\Big)^R &= \left(\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{z}-\alpha_i)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i z)^{d_i} \ . \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} (1-\alpha_j z)^{d_j} \right)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg\big(p(z)\big) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} d_j = d,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.

- $V_3 = V_4$: Sei

$$\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_3.$$

Zu zeigen ist, dass

$$\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_4.$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} \qquad \deg\big(g_i(z)\big) < d_i \ .$$

Aus Satz 222 (5) (Folie 6) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n.$$

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n\geq 0}\binom{d_i+n-1}{n}\cdot(\alpha_i z)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{d_i+n-1}{n}\cdot {\alpha_i}^n z^n\,.\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot {\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1} {\alpha_i}^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)} \cdot {\alpha_i}^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n \ .$$

Es gilt, dass $\deg\big(p_i(n)\big) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. □

Anwendung: Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

1. Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$

   mit

   $$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\ &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

4. Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b, so dass gilt:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z} \; .$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(z) &= z\left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}\right) \\ &= z\left(a\sum_{n\geq 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\geq 0}\beta^n z^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 1}(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})z^n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} F_n &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

4.12 Das Master-Theorem

Bei der Analyse von Divide-and-Conquer-Verfahren stößt man oft auf Rekursionen, die sich nicht als lineare Rekursionen formulieren lassen. So führt der Mergesort-Algorithmus in der Standardvariante zu der Rekursionsgleichung

$$C_n = C_{\lfloor n/2 \rfloor} + C_{\lceil n/2 \rceil} + n \quad \text{für alle } n > 1 \qquad \text{und} \quad C_1 = 0.$$

Löst man allgemein ein Problem der Größe n dadurch, dass man es in a Teilprobleme der Größe höchstens n/b aufteilt, so erhält man für die Laufzeit $T(n)$ eine Rekursion der Form

$$T(n) \leq a \cdot T(n/b) + f(n) \,,$$

wobei $f(n)$ die Laufzeit für die Aufteilung in Teilprobleme und für das Zusammenfügen der Lösungen der Teilprobleme ist.

Satz 227 (Master-Theorem)

Seien $a \in \mathbb{N}$, $b > 1$ und $C \geq 0$ Konstanten, und sei $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiter seien $c_1(n), \ldots, c_a(n)$ Funktionen mit $|c_i(n)| \leq C$ für alle $1 \leq i \leq a$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Ist dann $T(n)$ eine Funktion, die für $n = 1$ gleich 0 ist und die für $n \geq 1$ die Rekursionsgleichung

$$T(n) = T(n/b + c_1(n)) + \cdots + T(n/b + c_a(n)) + f(n)$$

erfüllt, dann gilt

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{falls } f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \text{ für ein } \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n), & \text{falls } f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^{\delta} n) \text{ f. } \delta > 0, \\ \Theta(f(n)), & \text{falls } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \text{ für ein } \epsilon > 0. \end{cases}$$

Für den Beweis des Master-Theorems verweisen wir auf die Literatur, z.B. in:

Verma, Rakesh M.:
A general method and a master theorem for divide-and-conquer recurrences with applications.
J. Algorithms **16**(1), pp. 67–79, 1994

Roura, Salvador:
An improved master theorem for divide-and-conquer recurrences.
Proceedings of the 24th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP'97 (Bologna, Italy, July 7–11, 1997). LNCS **1256**, pp. 449–459, 1997

Satz 228 ("Baby-Version" des MT)

Wenn die Funktion T für $x < 1$ gleich 0 ist und wenn für $x \geq 1$ die Rekursion

$$T(x) = aT\left(x/b\right) + x$$

gilt (also $T(1) = 1$), dann gilt für $n = b^t$ eine ganzzahlige Potenz von b:

$$T(n) = (1 + o(1)) \cdot \begin{cases} \frac{b}{b-a} n, & \text{falls } a < b, \\ n \log_b n, & \text{falls } a = b, \\ \frac{a}{a-b} n^{\log_b a}, & \text{falls } a > b\,. \end{cases}$$

Beweis:

Zuerst wenden wir die Rekursionsgleichung so oft an, bis wir die Anfangsbedingung erreichen. Wir haben also

$$\begin{aligned} T(n) &= n + aT(n/b) \\ &= n + a\frac{n}{b} + a^2 T(n/b^2) \\ &= n + a\frac{n}{b} + a^2\frac{n}{b^2} + a^3 T(n/b^3) \\ &= \cdots \\ &= n + a\frac{n}{b} + a^2\frac{n}{b^2} + \cdots + a^t T(n/b^t), \end{aligned}$$

wobei $t = \log_b n$. Also

$$T(n) = n\left(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^t}{b^t}\right)$$

Beweis (Forts.):

Fallunterscheidung:

$a < b$: In diesem Fall konvergiert die Summe und wir erhalten:

$$T(n) \leq n \sum_{k \geq 0} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{b}{b-a} n \; .$$

$a = b$: In diesem Fall ist die Lösung

$$T(n) = n \left(\log_b n + 1\right) = (1 + o(1)) \cdot n \log_b n \; .$$

Beweis (Forts.):

$a > b$: Wir erhalten:

$$\begin{aligned} T(n) &= n\left(\frac{a}{b}\right)^t \left(1 + \frac{b}{a} + \cdots + \frac{b^t}{a^t}\right) \\ &\leq n\frac{a}{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)^t \\ &= \frac{a}{a-b}a^{\log_b n} \\ &= \frac{a}{a-b}n^{\log_b a}\,, \end{aligned}$$

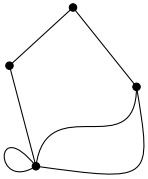
da $t = \log_b n$. □

Kapitel IV Graphen und Algorithmen

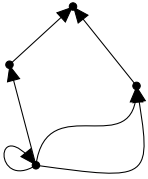
1. Grundlagen

Definition 229
Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Knoten (aka Ecken, engl. vertex, vertices) und einer (Mehrfach-)Menge $E \subseteq V \times V$ von Paaren $(u, v) \in V \times V$, genannt Kanten (engl. edges).

Ein Graph heißt ungerichteter Graph, falls für alle $(u, v) \in E$ auch $(v, u) \in E$ ist. Man schreibt dann E auch als Menge von ungeordneten Paaren $\{u, v\}$ von Kanten.

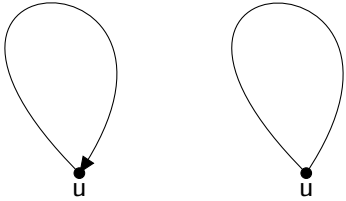


Ein Graph heißt ein gerichteter Graph, falls E (wie in obiger Definition) eine Menge von geordneten Paaren (u, v) ist.



1.1 Schlingen

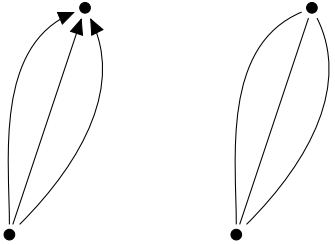
Definition 230
Eine Schlinge ist eine Kante der Form (u, u) bzw. $\{u, u\}$.



1.2 Mehrfachkanten

Definition 231

Ist E eine Multimenge (d. h. Kanten treten mit Vielfachheit auf), sind die Kanten mit Vielfachheit 2 oder größer Mehrfachkanten.



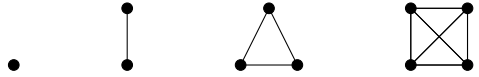
Ein Graph, der Mehrfachkanten enthält, heißt auch Multigraph.

1.3 Einfache Graphen

Definition 232
Ein Graph heißt einfach, falls er keine Schlingen oder Mehrfachkanten enthält.

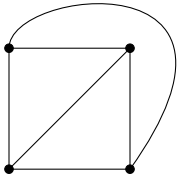
Definition 233
Ein Graph $G = (V, E)$ $(=: K_n)$ mit $|V| = n$ Knoten heißt vollständig (der vollständige Graph mit n Knoten), falls $E = \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ bzw.
$E = \{(u, v); u, v \in V, u \neq v\}$.

Beispiel 234



K_0 K_1 K_2 K_3 K_4

Der K_4 lässt sich auch kreuzungsfrei zeichnen:



Für die Anzahl der Kanten in einem vollständigen Graphen (und damit für die maximale Anzahl von Kanten in einem einfachen Graphen) gilt:

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

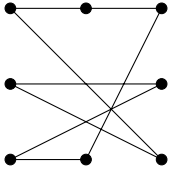
1.4 Bipartiter Graph

Definition 235

Ein Graph heißt bipartit, falls sich V in $V_1 \uplus V_2$ mit $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ so partitionieren lässt, dass gilt:

$$(\forall e \in E)\big[e \in (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)\big]$$

Beispiel 236 (C_8, Kreis mit 8 Knoten)



Bemerkung:
Schreibweise für bipartite Graphen:

$$G = (V_1, V_2, E)$$

1.5 Vollständiger bipartiter Graph

Definition 237

Ein bipartiter Graph $G = (V_1, V_2, E)$ heißt vollständig, falls $E = V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1$.
(Notation: $K_{m,n}$, mit $m = |V_1|, n = |V_2|$)

Beispiel 238

$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{3,3}$

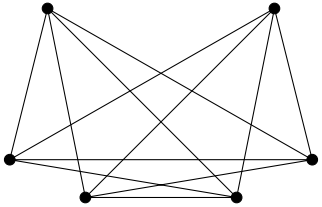
1.6 k-partiter Graph

Definition 239

Ein Graph heißt k-partit ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$), falls es eine Partition $V = V_1 \uplus V_2 \uplus \ldots \uplus V_k$ mit $V_i \neq \emptyset, i = 1, \ldots, k$ gibt, so dass

$$(\forall e \in E)\big[e \in V_i \times V_j; 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\big]$$

Beispiel 240 (Vollständiger tripartiter Graph $K_{2,2,2}$)



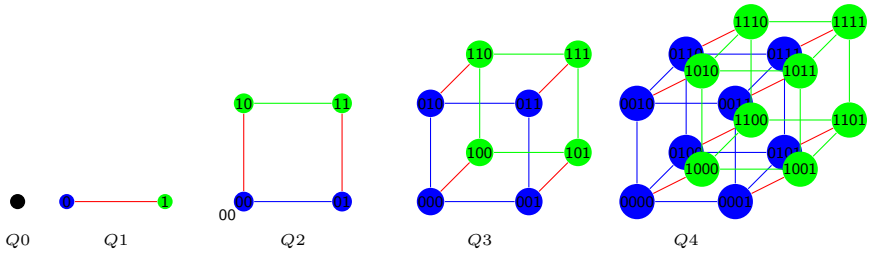
1.7 (Binärer) Hyperwürfel

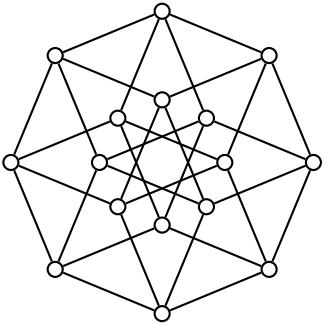
Definition 241

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt n-dimensionaler binärer Hyperwürfel (aka Q_n), falls $V = V_n = \{0, 1\}^n$ mit

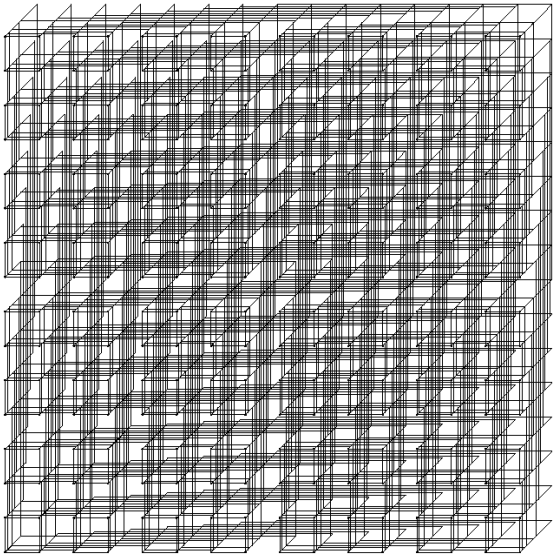
$$E = \Big\{ \{v, w\} \in {V_n}^2;\ \text{Hamming-Abstand}(v, w) = 1 \Big\}.$$

Beispiel 242





Q_4: 4-dimensionaler Hyperwürfel



Q_8: 8-dimensionaler Hyperwürfel

Für die Anzahl der Knoten in Q_n gilt:

$$|V| = 2^n$$

Für die Anzahl der Kanten in Q_n gilt:

$$|E| = n \cdot \frac{2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$$

1.8 Pfade

Definition 243

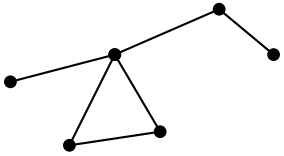
1. Ein Pfad der Länge n ist eine Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von Knoten eines Graphen $G = (V, E)$, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.
2. Der Graph P_n ist der Graph (V, E) mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \big\{\{v_i, v_{i+1}\}; i = 1, \ldots, n-1\big\}$.

Beispiel 244

Definition 245

Ein Pfad heißt einfach, falls alle Knoten paarweise verschieden sind.

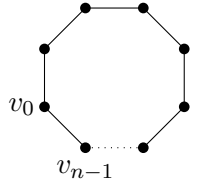
Beispiel 246 (Pfad, aber *nicht einfacher* Pfad der Länge 7)



1.9 Kreise

Definition 247

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt (einfacher) Kreis der Länge n (i. Z. $C_n, n \geq 3$), falls $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ und $E = \big\{\{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}; i = 0, \ldots, n-1\big\}$.



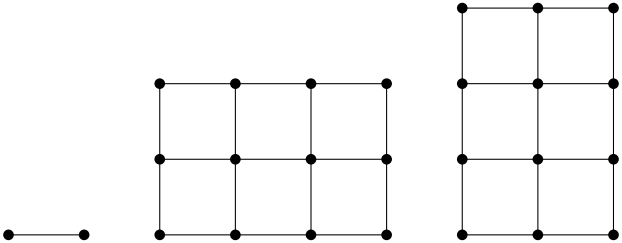
1.10 Gitter

Definition 248

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein m-n-Gitter (zweidimensionales Gitter mit den Seitenlängen m und n, i. Z. $M_{m,n}$), falls $V = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ und

$$\underbrace{\{(i,j),(k,l)\}}_{\substack{\text{Kante zwischen} \\ \text{Knoten } (i,j) \\ \text{und Knoten } (k,l)}} \in E \iff |i-k| + |j-l| = 1$$

Beispiel 249



$M_{1,2}$ $M_{3,4}$ $M_{4,3}$

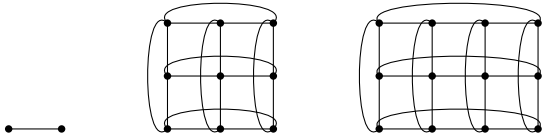
1.11 Torus

Definition 250

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zweidimensionaler Torus (pl. Tori) mit den Seitenlängen m und n, falls $V = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ und

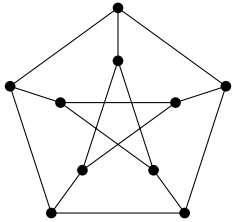
$$\{(i,j),(k,l)\} \in E \iff |i - k \bmod m| + |j - l \bmod n| = 1$$

Beispiel 251



1.12 Petersen-Graph

Definition 252
Der folgende Graph heißt Petersen-Graph:



2. Definitionen für ungerichtete Graphen

Falls nicht explizit anders gesagt, sind in diesem Abschnitt alle betrachteten Graphen als *einfach* vorausgesetzt.

2.1 Pfade und Kreise

Definition 253
Ein Pfad (Weg) in einem Graphen ist eine Folge von Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_k$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E, i = 0, \ldots, k-1$.

Ein Pfad heißt einfach, wenn alle v_i paarweise verschieden sind.

Ein Kreis ist ein Pfad, bei dem gilt: $v_0 = v_k$.

Ein Kreis heißt einfach, wenn die Knoten $v_0, \ldots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind.

2.2 Isomorphe Graphen

Definition 254

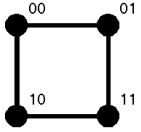
Zwei Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ heißen isomorph, falls es eine Bijektion $\varphi : V_1 \to V_2$ gibt, so dass gilt:

$$\big(\forall v, w \in V_1\big)\Big[\{v, w\} \in E_1 \iff \big\{\varphi(v), \varphi(w)\big\} \in E_2\Big].$$

Beispiel 255

$K_{2,2} \cong C_4 \cong Q_2$ oder $T_{4,4,4} \cong Q_6$

Beispiel 256



Q_2

2.3 Adjazenz

Definition 257
Sei $G = (V, E)$, $u, v \in V$ und $\{u, v\} \in E$. Dann heißen u und v adjazent (aka benachbart). u und v sind Endknoten von $\{u, v\}$; u und v sind inzident zur Kante $\{u, v\}$. Zwei Kanten heißen adjazent, falls sie einen Endknoten gemeinsam haben.

2.4 Nachbarschaft

Definition 258
Sei $u \in V$.

$$N(u) := \{v \in V; u \neq v, \{u, v\} \in E\}$$

heißt die Nachbarschaft von u.

$\mathrm{d}(u) := \deg(u) := |N(u)|$ heißt Grad von u.

Falls $\mathrm{d}(u) = 0$, so heißt u isoliert.

2.5 Gradfolge

Definition 259
Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o.B.d.A. so, dass

$$\mathrm{d}(v_1) \geq \mathrm{d}(v_2) \geq \ldots \geq \mathrm{d}(v_n).$$

Dann heißt $\big(\mathrm{d}(v_1), \mathrm{d}(v_2), \ldots, \mathrm{d}(v_n)\big)$ die Gradfolge von G.

Bemerkung:
Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge.

Satz 260

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis:

$\sum \mathrm{d}(v)$ zählt Halbkanten. □

Korollar 261

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

2.6 Reguläre Graphen

Definition 262

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt k-regulär genau dann, wenn

$$(\forall v \in V)\Big[\mathrm{d}(v) = k\Big].$$

Beispiel 263

Q_k ist k-regulär; $T_{m_1,\ldots,m_k}$ ist $2k$-regulär.

2.7 Teilgraphen

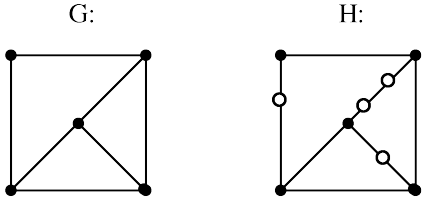
Definition 264

1. $G' = (V', E')$ heißt Teilgraph von $G = (V, E)$, falls

$$V' \subseteq V \quad \wedge \quad E' \subseteq E.$$

2. Ein Graph $H = (\overline{V}, \overline{E})$ heißt Unterteilung von $G = (V, E)$, falls H aus G dadurch entsteht, dass jede Kante $\{v, w\} \in E$ durch einen Pfad $v = \overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k = w$ ersetzt wird. Dabei sind $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{k-1}$ jeweils neue Knoten.

Beispiel 265 (Unterteilung)



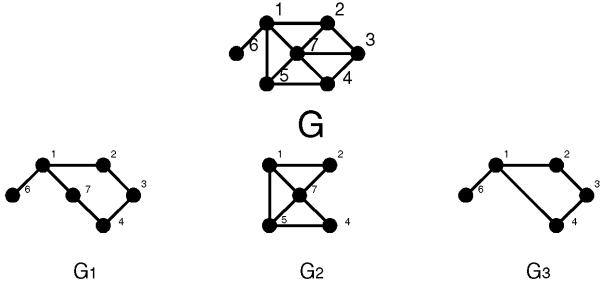
Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

2.8 Induzierte Teilgraphen

Definition 266

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt (knoten-)induzierter Teilgraph von $G = (V, E)$, falls G' Teilgraph von G ist und $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel 267

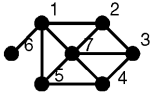


G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Sei $V' \subseteq V$. Dann bezeichnet $G \setminus V'$ den durch $V \setminus V'$ induzierten Teilgraphen von G.

Beispiel 268

$G_4 = G \setminus \{2, 3, 4, 7\}$



G

G4

2.9 Erreichbarkeit

Definition 269
Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.

Satz 270
Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \iff \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:
Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. □

2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen Zusammenhangskomponenten von G. G heißt zusammenhängend, falls G aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

2.11 Bäume

Definition 271
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

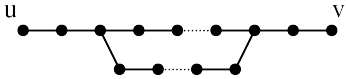
1. $G = (V, E)$ *ist ein nichtleerer Baum.*
2. $V \neq \emptyset$ *und für je zwei Knoten* $u, v \in V$ *mit* $u \neq v$ *gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen* u *und* v.
3. G *ist zusammenhängend und* $|V| = |E| + 1$.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade zwischen u und v.



Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Beweis (Forts.):

$2. \Rightarrow 3.$ Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang).

G muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle $u \in V$ beliebig. Wähle einen Nachbarn u_1 von u. Falls $deg(u_1) > 1$, wähle einen Nachbarn $u_2 \neq u$ von u_1 usw. Da V endlich und G zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$\big(|V| - 1\big) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

Beweis (Forts.):

3. $\Rightarrow$ 1.

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.
Zu zeigen: G ist kreisfrei.
Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.
Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

□

Korollar 273

Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ die Gradfolge von T, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

2.12 Spannbäume

Definition 274
Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.

Satz 275 (Arthur Cayley, 1889)

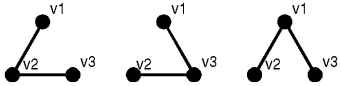
Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel 276

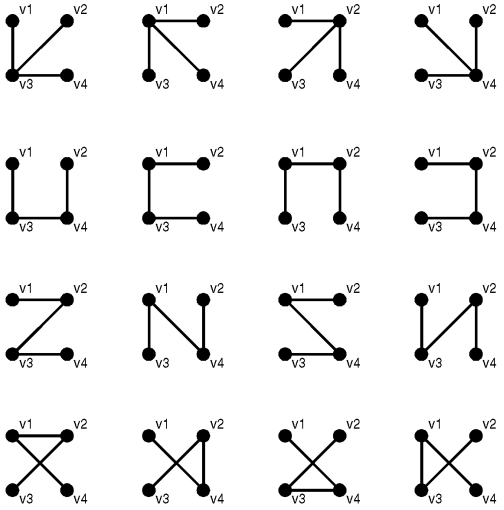
- $n = 2$:

- $n = 3$:



Beispiel (Forts.)

- $n = 4$:



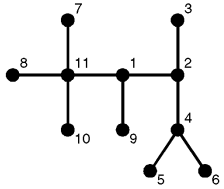
Beweis:
Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{T}(n)$ der markierten Spannbäume mit n Knoten und der Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ an.
(Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als Prüfer-Code.)

Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
  $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
  $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` v_i `in` T
  $T := T \setminus \{v_i\}$
od

Beispiel 277



Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

for $i = 1$ **to** n **do**
  $d(v_i) := f_i + 1$
od
$B := \emptyset$; $T := \emptyset$
for $i = 1$ **to** $n-2$ **do**
  $b := \min_{1 \le j \le n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
  `füge Kante` (b, a_i) `zu` T `hinzu`
  $B := B \cup \{b\}$
od
`füge letzte Kante zu` T `gemäß Gradbedingung hinzu`

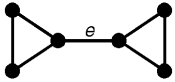
□

2.13 Brücken

Definition 278

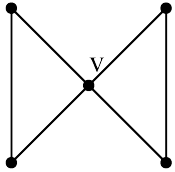
Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

Beispiel 279



Beobachtung:
Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition)
Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



2.14 Abstand

Definition 280

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$\mathrm{d}(u, v) := k$$

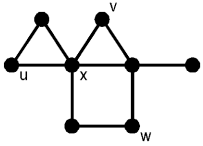
der Abstand von u und v in G.

Wir setzen $\mathrm{d}(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.

$$\mathsf{D}(G) := \max\big\{\mathrm{d}(u, v); u, v \in V\big\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Beispiel 281



$\mathrm{d}(u,v) = 2$, $\mathrm{d}(u,w) = 3$, $\mathrm{d}(u,x) = 1$, $\mathrm{D}(G) = 3$.

Beobachtung:
d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$\mathrm{d}(u,v) \leq \mathrm{d}(u,w) + \mathrm{d}(w,v)$$

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 282
Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Beobachtungen:

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.
- Gibt es keine Schlingen, so sind alle Diagonalelemente null.

Satz 283

Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei

$$A^0 := I,$$
$$A^{i+1} := A^i \cdot A \qquad \text{für alle } i \geq 0.$$

Dann gilt für

$$A^k = \left(a_{ij}{}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} :$$

$a_{i,j}{}^{(k)}$ *ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k in G von v_i nach v_j.*

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

Beweis:
Induktion nach k:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$
${a_{il}}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k von v_i nach v_l.
Die Anzahl verschiedener Pfade von v_i nach v_j der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^{n} {a_{il}}^{(k)} \cdot a_{lj} = {a_{ij}}^{(k+1)}$$

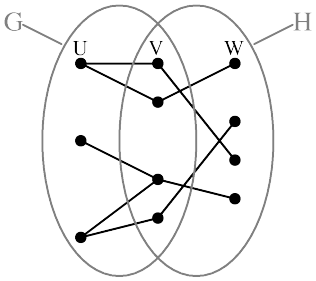
□

Bemerkung:
Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen
Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein bipartiter Graph.
Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix A' des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das boolesche Produkt $A_G \cdot A_H$:

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

Definition 284

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als $0,1$-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^{k} a_{i,l} \wedge b_{l,j} \qquad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

2.16 Inzidenzmatrix

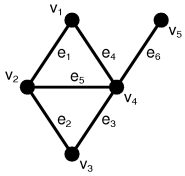
Definition 285

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

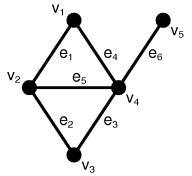
Beispiel 286 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} + A$$

3. Definitionen für gerichtete Graphen

3.1 Digraph

Definition 287
Ein Digraph (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*) $G = (V, A)$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von geordneten Paaren, den gerichteten Kanten.

3.2 Grad

Definition 288

- $\mathrm{d}^-(v)$ ist der Aus-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten v.
- $\mathrm{d}^+(v)$ ist der In-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten v.
- $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$ ist der (Gesamt-)Grad von v.

Beobachtung:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}^-(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}^+(v) = |A|$$

3.3 Adjazenzmatrix

Definition 289

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$C = \big(c_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Falls G schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von C gleich 0.

3.4 Inzidenzmatrix

Definition 290

Sei $G = (V, A)$ ein einfacher(!) Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt Laplacesche Matrix. Dabei ist, für alle i, j, der Eintrag $a'_{i,j}$ die Anzahl der im zu G gehörigen ungerichteten Graphen zwischen v_i und v_j verlaufenden Kanten. Enthält G keine antiparallelen Kanten, ist damit A' gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

Beobachtung: Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.

3.5 Gerichteter Pfad

Definition 291
Eine Folge $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ mit $u_i \in V$ für $i = 0, \ldots, n$ heißt gerichteter Pfad, wenn

$$\big(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\big)\Big[(u_i, u_{i+1}) \in A\Big].$$

Ein gerichteter Pfad heißt einfach, falls alle u_i paarweise verschieden sind.

3.6 Gerichteter Kreis

Definition 292

Ein gerichteter Pfad $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ heißt gerichteter Kreis, wenn $u_0 = u_n$.
Der gerichtete Kreis heißt einfach, falls $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ alle paarweise verschieden sind.

3.7 dag

Definition 293

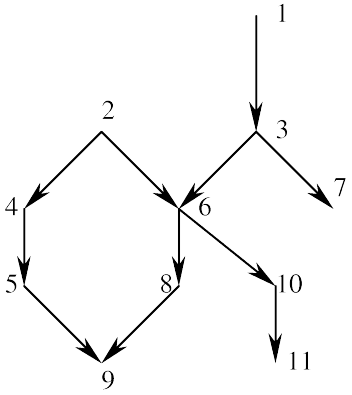
Ein Digraph, der keinen gerichteten Kreis enthält, heißt *d*irected *a*cyclic *g*raph, kurz dag.

In einem dag heißen Knoten mit In-Grad 0 Quellen, Knoten mit Aus-Grad 0 Senken.

Eine Nummerierung $i : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ der Knoten eines *dags* heißt topologisch, falls für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt:

$$i(u) < i(v).$$

Beispiel 294



Algorithmus zur topologischen Nummerierung:

```
while V≠∅ do
    nummeriere eine Quelle mit der nächsten Nummer
    streiche diese Quelle aus V
od
```

3.8 Zusammenhang

Definition 295
Ein Digraph heißt zusammenhängend, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

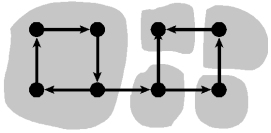
3.9 Starke Zusammenhangskomponenten

Definition 296
Sei $G = (V, A)$ ein Digraph. Man definiert eine Äquivalenzrelation $R \subseteq V \times V$ wie folgt:

$$uRv \iff \begin{cases} \text{es gibt in } G \text{ einen gerichteten Pfad von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen gerichteten Pfad von } v \text{ nach } u. \end{cases}$$

Die von den Äquivalenzklassen dieser Relation induzierten Teilgraphen heißen die starken Zusammenhangskomponenten von G.

Beispiel 297



4. Durchsuchen von Graphen

Gesucht sind Prozeduren, die alle Knoten (eventuell auch alle Kanten) mindestens einmal besuchen und möglichst effizient sind.

4.1 Tiefensuche, Depth-First-Search

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, gegeben als Adjazenzliste.

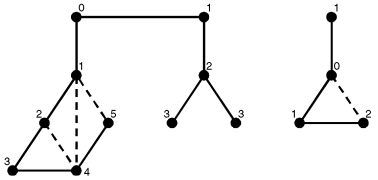
```
algorithm DFS
  void proc DFSvisit(node v)
    visited[v] := true
    pre[v] := ++precount
    for all u ∈ adjacency_list[v] do
      if not visited[u] then
        type[(v,u)] := 'Baumkante'
        parent[u] := v
        DFSlevel[u] := DFSlevel[v]+1
        DFSvisit(u)
      elsif u ≠ parent[v] then
        type[(v,u)] := 'Rückwärtskante'
      fi
    od
    post[v] := ++postcount
  end proc
```

Fortsetzung

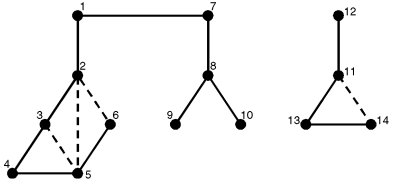
```
    co Initialisierung: oc
    for all v ∈ V do
      visited[v] := false
      pre[v] := post[v] := 0
    od
    precount := postcount := 0
    for all v ∈ V do
      if not visited[v] then
        DFSlevel[v] := 0
        parent[v] := null
        DFSvisit(v)
      fi
    od
  end
```

Beispiel 298 (gestrichelt sind Rückwärtskanten)

DFS-Level:

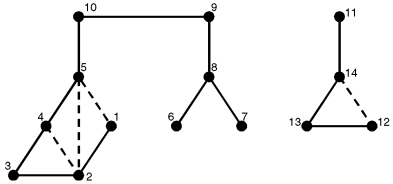


Präorder-Nummer:



Beispiel (Fortsetzung)

Postorder-Nummer:



Beobachtung: Die Tiefensuche konstruiert einen Spannwald des Graphen. Die Anzahl der Bäume entspricht der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G.

Satz 299

Der Zeitbedarf für die Tiefensuche ist (bei Verwendung von Adjazenzlisten)

$$O\big(|V| + |E|\big) \; .$$

Beweis:

Aus Algorithmus ersichtlich. □

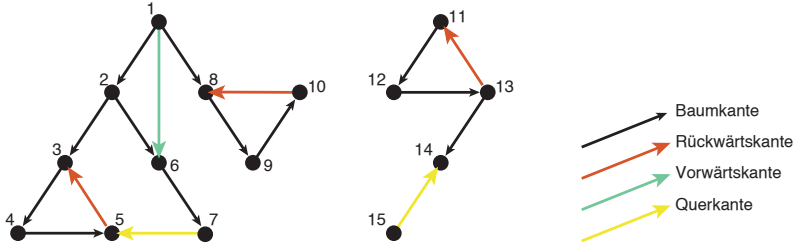
Tiefensuche im Digraphen: Für gerichtete Graphen verwendet man obigen Algorithmus, wobei man die Zeilen

```
elsif u ≠ parent[v] then
  type[(v,u)] := 'Rückwärtskante'
fi
```

ersetzt durch

```
elsif pre[u] > pre[v] then
  type[(v,u)] := 'Vorwärtskante'
elsif post[u] ≠ 0 then
  type[(v,u)] := 'Querkante'
else
  type[(v,u)] := 'Rückwärtskante'
fi
```

Beispiel 300 (Präorder-Nummer)



4.2 Breitensuche, Breadth-First-Search

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, gegeben mittels Adjazenzlisten.

```
algorithm BFS
  for all v ∈ V do
    touched[v] := false
    bfsNum[v] := 0
  od
  count := 0
  queue := ∅
  for all v ∈ V do
    if not touched[v] then
      bfsLevel[v] := 0
      parent[v] := null
      queue.append(v)
      touched[v] := true
      while not empty(queue) do
        u := remove_first(queue)
        bfsNum[u] := ++count
```

Fortsetzung

```
            for all w ∈ adjacency_list[u] do
              if not touched[w] then
                type[(u,w)] := 'Baumkante'
                parent[w] := u
                bfsLevel[w] := bfsLevel[u]+1
                queue.append(w)
                touched[w] := true
              elsif not w = parent[u] then
                type[(u,w)] := 'Querkante'
              fi
            od
          od
        fi
      od
    end
```

Beobachtungen:

1. Die Breitensuche konstruiert einen Spannwald.
2. Der Spannwald besteht genau aus den Baumkanten im Algorithmus.
3. (u, v) ist Querkante $\Rightarrow \left|\mathrm{bfsLevel}(u) - \mathrm{bfsLevel}(v)\right| \leq 1$

Satz 301

Der Zeitbedarf für die Breitensuche ist (bei Verwendung von Adjazenzlisten)

$$O\big(|V| + |E|\big) \; .$$

Beweis:

Aus Algorithmus ersichtlich. □

4.3 Matroide

Definition 302
Sei S eine endliche Menge, $U \subseteq 2^S$ eine Teilmenge der Potenzmenge von S. Dann heißt $M = (S, U)$ ein Matroid und jedes $A \in U$ heißt unabhängige Menge, falls gilt:

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U,\ B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad B \in U$
3. $$A, B \in U,\ |B| = |A| + 1 \quad \Longrightarrow \quad (\exists x \in B \setminus A)\Big[\big(A \cup \{x\}\big) \in U\Big]$$

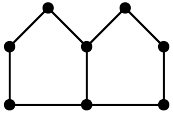
Jede bezüglich $\subseteq$ maximale Menge in U heißt Basis.
Nach 3. haben je zwei Basen gleiche Kardinalität. Diese heißt der Rang $\mathsf{r}(M)$ des Matroids.

Beispiel 303

Linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum.

Beispiel 304

G sei folgender Graph:



$S =$ Menge der Kanten von G
$U =$ Menge der kreisfreien Teilmengen von S

4.4 Greedy-Algorithmus

Sei $M = (S, U)$ ein Matroid, $w : S \to R$ eine Gewichtsfunktion.

```
algorithm greedy(S,U,w)
  B := ∅
  while (|B|<r(M)) do
    sei x ∈ {y ∈ S \ B; B ∪ {y} ∈ U} mit
      minimalem Gewicht
    B := B ∪ {x}
  od
end
```

Satz 305

Der Greedy-Algorithmus liefert eine Basis minimalen Gewichts.

Beweis:

Aus der Definition des Matroids (1.) folgt, dass die leere Menge $\emptyset$ eine unabhängige Menge ist.

Aus 3. folgt, dass in der `while`-Schleife wiederum nur unabhängige Mengen generiert werden.

Daher ist B am Ende des Algorithmus eine Basis (da inklusionsmaximal). Es bleibt zu zeigen, dass die gefundene Basis minimales Gewicht besitzt.

Sei also $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ die vom Algorithmus gelieferte Basis. Sei $b_1, \ldots, b_r$ die Reihenfolge der Elemente, in der sie der Greedy-Algorithmus ausgewählt hat. Dann gilt

$$w(b_1) \leq w(b_2) \leq \ldots \leq w(b_r).$$

Beweis (Forts.):

Sei weiter $B' = \{b'_1, \ldots, b'_r\}$ eine minimale Basis, und es gelte o. B. d. A.

$$w(b'_1) \leq w(b'_2) \leq \ldots \leq w(b'_r) \ .$$

Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Gemäß Eigenschaft 3 für Matroide folgt, dass es ein $b' \in \{b'_1, \ldots, b'_i\}$ gibt, so dass $\{b_1, \ldots, b_{i-1}, b'\} \in U$.

Damit ist $w(b_i) \leq w(b'_i)$ (für alle i), und daher wegen der Minimalität von B'

$$w(b_i) = w(b'_i) \qquad \text{für alle } i \ .$$

□

Satz 306

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph, $F \subseteq 2^E$ die Menge der kreisfreien Teilmengen von E. Dann ist $M = (E, F)$ ein Matroid mit Rang $|V| - 1$.

Beweis:

Es sind die drei Eigenschaften eines Matroids zu zeigen.

1. $\emptyset$ ist kreisfrei und daher in F enthalten.
2. Ist A kreisfrei und B eine Teilmenge von A, dann ist auch B kreisfrei.

Beweis (Forts.):

3. Sind A und B kreisfrei, $|B| = |A| + 1$, dann existiert ein $b \in B$, so dass $A \cup \{b\}$ kreisfrei ist:

   Wir betrachten die Wälder (V, A) (mit $|A|$ Kanten und $|V| - |A|$ Zusammenhangskomponenten) und (V, B) (mit $|B|$ Kanten und $|V| - |B|$ Zusammenhangskomponenten). Diese Bedingungen lassen zwei Möglichkeiten zu:

   1. Es existiert eine Kante e in B, die zwei Zusammenhangskomponenten in (V, A) verbindet. Damit ist $A \cup \{e\}$ kreisfrei.
   2. Alle Kanten in B verlaufen innerhalb der Zusammenhangskomponenten in (V, A). (V, A) besitzt jedoch eine Zusammenhangskomponente mehr als (V, B). Daher muss es eine Zusammenhangskomponente in (V, A) geben, deren Knoten nicht in (V, B) auftauchen, was einen Widerspruch darstellt.

□

Kruskals Algorithmus:

```
algorithm kruskal
  sortiere E aufsteigend: w(e_1) ≤ ... ≤ w(e_m).
  F := ∅
  i := 0
  while |F|<|V|-1 do
    i++
    if F ∪ {e_i} kreisfrei then
      F := F ∪ {e_i}
    fi
  od
end
```

Satz 307

Kruskals Algorithmus bestimmt (bei geeigneter Implementierung) einen minimalen Spannbaum für $G = (V, E)$ in Zeit $O\Big(|E| \cdot \log\big(|V|\big)\Big)$.

Beweis:

Die Korrektheit folgt aus Satz 306.
Zur Laufzeit:
Die Sortierung von E nach aufsteigendem Gewicht benötigt

$$O\Big(|E| \cdot \log\big(|E|\big)\Big),$$

z. B. mit Heapsort oder Mergesort.
Da $|E| \leq (|V|)^2$, gilt auch

$$O\Big(|E| \cdot \log\big(|V|\big)\Big)$$

als Zeitbedarf für das Sortieren.

Implementierung des Tests auf Kreisfreiheit:

Repräsentation der Zusammenhangskomponenten:
Feld Z: $Z[i]$ ist die Zusammenhangskomponente des Knoten i.
Feld N: $N[j]$ ist die Anzahl der Knoten in der Zusammenhangskomponente j.
Feld M: $M[j]$ ist eine Liste mit den Knoten in der Zusammenhangskomponente j.

```
co Initialisierung oc
for all i ∈ V do
  Z[i] := i
  N[i] := 1
  M[i] := (i)
od
co Test auf Kreisfreiheit oc
sei e := {i, j}
```

Fortsetzung

```
co F ∪ {e} kreisfrei ⇔ Z[i]≠Z[j] oc
if Z[i]≠Z[j] then
  if N[Z[i]] <= N[Z[j]] then
    BigSet := Z[j]
    SmallSet := Z[i]
  else
    BigSet := Z[i]
    SmallSet := Z[j]
  fi
  N[BigSet] := N[BigSet] + N[SmallSet]
  for all k ∈ M[SmallSet] do
    Z[k] := BigSet
  od
  hänge M[SmallSet] an M[BigSet] an
fi
```

Beweis (Forts.):

Zeitbedarf für den Test: $O(1)$ für jede Abfrage, damit dafür insgesamt

$$O\big(|E|\big).$$

Zeitbedarf für das Umbenennen der Zusammenhangskomponenten: Nach jedem Umbenennen befindet sich ein Knoten in einer mindestens doppelt so großen Zusammenhangskomponente. Daher ist die Anzahl der Umbenennungen je Knoten $\leq \log\big(|V|\big)$. Für das Umbenennen aller Knoten benötigt man dann

$$O\Big(|V| \cdot \log\big(|V|\big)\Big).$$

□

Bemerkung:
Es gibt Algorithmen für minimale Spannbäume der Komplexität $O(m + n \cdot \log n)$ und, für dünnbesetzte Graphen, der Komplexität $O(m \cdot \log^* n)$, wobei

$$\log^* x = \min_{n \in \mathbb{N}} \left\{ n \colon \underbrace{\log\Big(\log\big(\cdots \log(x) \cdots\big)\Big)}_{n} < 1 \right\}.$$

5. Spezielle Pfade

5.1 Eulersche Pfade und Kreise

Definition 308
Ein Pfad bzw. Kreis in einem Graphen (Digraphen) heißt eulersch, wenn er jede Kante des Graphen genau einmal enthält.
Ein Graph (Digraph) heißt eulersch, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Satz 309
Ein Graph besitzt genau dann einen eulerschen Kreis (Pfad), wenn er zusammenhängend ist und alle (alle bis auf zwei) Knoten geraden Grad haben.

Beweis:

„⇒“

Ein eulerscher Graph muss notwendigerweise zusammenhängend sein. Die Knotengrade müssen gerade sein, da für jede zu einem Knoten (auf dem eulerschen Kreis) hinführende Kante auch eine von diesem Knoten weiterführende Kante existieren muss, da sonst der eulersche Kreis nicht fortgeführt werden kann.

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“

Konstruktion des eulerschen Kreises: Man suche einen beliebigen Kreis im Graphen (muss aufgrund der Voraussetzungen existieren). Sind noch Kanten unberücksichtigt, suche man auf dem Kreis einen Knoten, der zu noch nicht verwendeten Kanten inzident ist.

Nach Voraussetzung muss sich wieder ein Kreis finden lassen, der vollständig aus noch nicht berücksichtigten Kanten besteht. Diesen füge man zum bereits gefundenen Kreis hinzu, worauf sich ein neuer Kreis ergibt.

Dieses Verfahren läßt sich fortführen, bis keine Kanten mehr unberücksichtigt sind und damit ein eulerscher Kreis gefunden ist.

□

Satz 310

Ein Digraph besitzt genau dann einen eulerschen Kreis (Pfad), wenn er stark zusammenhängend ist und für alle Knoten der In-Grad gleich dem Aus-Grad ist (wenn für einen Knoten In-Grad $=$ Aus-Grad -1, für einen weiteren Knoten In-Grad $=$ Aus-Grad $+1$ gilt und für alle anderen Knoten der In-Grad gleich dem Aus-Grad ist).

Beweis:

Der Beweis ist analog zum Beweis des vorhergehenden Satzes. □

Algorithmus zum Finden eines eulerschen Kreises:

```
algorithm Eulerian_Circle(V,E)
  EC := ∅
  select v=v_0 ∈ V
  do
    C := ∅
    while N(v)≠∅ do
      select w ∈ N(v)
      E := E\{v,w}
      C := C ∪ {v,w}
      if N(v)≠∅ then Q.add(v) fi
      v := w
    od
    co Neuer Kreis oc
    if C≠∅ then EC := EC ∪ C fi
```

Fortsetzung

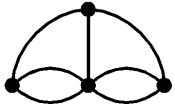
```
        if not empty(Q) then
          v := Q.remove()
        fi
      until E = ∅
    end
```

Laufzeit des Algorithmus: $\Theta(|E|)$.
Laufzeit der `while`-Schleife: $O(|E|)$, der `do`-`until`-Schleife ohne Durchlaufen der `while`-Schleife: $O(|V|)$ und damit ebenfalls $O(|E|)$, da der Graph zusammenhängend ist.

5.2 Hamiltonsche Pfade

Ein Pfad (Kreis) in einem Graphen (Digraphen) heißt hamiltonsch, wenn er jeden Knoten genau einmal enthält.
Ein Graph (Digraph) heißt hamiltonsch, wenn er einen hamiltonschen Kreis enthält.

Beispiel 311 (Das Königsberger Brückenproblem)



Dieser Graph besitzt einen hamiltonschen Kreis, aber weder einen eulerschen Kreis noch einen eulerschen Pfad.

Die Aufgabe, einen hamiltonschen Kreis zu finden, ist wesentlich schwerer als einen eulerschen Kreis zu finden; es ist ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem.

6. Kürzeste Wege

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. O. B. d. A. sei G vollständig, damit auch zusammenhängend.

Sei $u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ ein Pfad in G. Die Länge dieses Pfades ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}).$$

$\mathrm{d}(u, v)$ sei die Länge eines kürzesten Pfades von u nach v.

Problemstellungen:

1. Gegeben $u, v \in V$, berechne $\mathrm{d}(u, v)$.
2. Gegeben $u \in V$, berechne für alle $v \in V$ die Länge $\mathrm{d}(u, v)$ eines kürzesten Pfades von u nach v (sssp, single source shortest path).
3. Berechne für alle $(u, v) \in V^2$ die kürzeste Entfernung $\mathrm{d}(u, v)$ (apsp, all pairs shortest path).

6.1 Der Floyd-Warshall-Algorithmus für apsp

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Sei o. B. d. A. $V = \{0, \ldots, n-1\}$. Eine Gewichtsmatrix ist wie folgt definiert:

$$D = \big(w(v_i, v_j)\big)_{\substack{0 \le i < n \\ 0 \le j < n}}$$

Ziel ist es, eine $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$d_{ij} = \text{ Länge eines kürzesten Weges von } i \text{ nach } j$$

zu berechnen. Dazu werden induktiv Matrizen $D^{(k)}$ mit Einträgen

$$d_{ij}^{(k)} = \left(\begin{array}{c} \text{Länge eines kürzesten Weges von } i \text{ nach } j, \\ \text{so dass alle inneren Knoten} < k \text{ sind} \end{array} \right)$$

erzeugt.

```
algorithm Floyd
  for i=0 to n-1 do
    for j=0 to n-1 do
      D^0[i,j] := w(v_i,v_j)
    od
  od
  for k=0 to n-1 do
    for i=0 to n-1 do
      for j=0 to n-1 do
        D^{k+1}[i,j] := min{D^k[i,j],
                            D^k[i,k]+D^k[k,j]}
      od
    od
  od
end
```

Satz 312

Der Floyd-Algorithmus berechnet für alle $u, v \in V^2$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen u und v, und zwar mit Zeitbedarf $\Theta(n^3)$ und Platzbedarf $\Theta(n^2)$.

Beweis:

Ersichtlich aus Algorithmus. □

Bemerkungen:

1. Zur Bestimmung der eigentlichen Pfade (und nicht nur der Entfernungen) muss bei der Minimum-Bestimmung jeweils das k gespeichert werden.
2. Der Algorithmus funktioniert auch, wenn *negative Kantengewichte* vorhanden sind, es jedoch keine *negativen Kreise* gibt.
3. Die Erweiterung auf Digraphen ist offensichtlich.

6.2 Dijkstras Algorithmus für sssp

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $s \in V$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

```
algorithm Dijkstra
  F:=V\{s}
  for all v ∈ F do d[v] := w(s,v) od
  co d[s]=0 oc
  while F≠∅ do
    bestimme v ∈ F mit d[v] minimal
    F:=F\{v}
    for all w ∈ N(v) do
      d[w] := min{d[w], d[v]+w(v,w)}
    od
  od
end
```

Satz 313

Dijkstras Algorithmus berechnet $\mathrm{d}(s,v)$ *für alle* $v \in V$*; der Zeitaufwand ist* $O(n^2)$*, der Platzbedarf* $O(n+m)$*.*

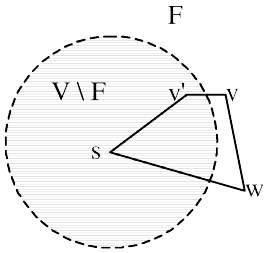
Beweis:

Zeit- und Platzbedarf sind aus dem Algorithmus ersichtlich. Die Korrektheit zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis:

Annahme: v sei der erste Knoten, so dass $\mathrm{d}(s,v)$ falsch (d. h. zu groß) berechnet wird.

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



Nach Annahme muss dann gelten:

$$\mathrm{d}(w) + w(w,v) < \mathrm{d}(s,v') + \mathrm{d}(v',v) = \mathrm{d}(v)\ .$$

Damit wäre $\mathrm{d}(w)$ aber kleiner als $\mathrm{d}(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

Bemerkung:
Mit besseren Datenstrukturen (priority queues – z. B. Fibonacci heaps) kann Dijkstras Algorithmus so implementiert werden, dass er z. B. in Zeit $O(m + n \cdot \log n)$ läuft.

7. Matchings

Definition 314
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. $M \subseteq E$ heißt Matching, falls alle Kanten in M paarweise disjunkt sind.
2. M heißt maximales Matching, falls es kein Matching M' in G gibt mit $M \subsetneq M'$.
3. M heißt Matching maximaler Kardinalität (aka Maximum Matching), falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt.
4. $\mathrm{m}(G)$ ist die Kardinalität eines Maximum Matchings in G.

Beispiel 315

maximales Matching
(aber nicht Maximum)

Maximum-Matching
(natürlich auch maximal)

7.1 Matchings in bipartiten Graphen

Satz 316 („Heiratssatz“)

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist $\mathrm{m}(G) = |U|$ genau dann, wenn gilt:

$$(\forall A \subseteq U)\big[|A| \leq |N(A)|\big]$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“

Offensichtlich.

„$\Leftarrow$“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

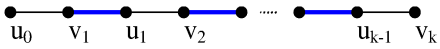
Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

Beweis (Forts.):

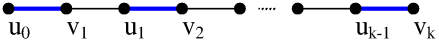
„$\Leftarrow$“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:



Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.

Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



Definition 317

Man definiert für einen bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ die Kenngröße:

$$\delta := \delta(G) := \max_{A \subseteq U} \{|A| - |N(A)|\}$$

Da bei der Maximumsbildung auch $A = \emptyset$ sein kann, ist $\delta \geq 0$.

Satz 318

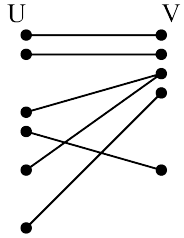
Es gilt:

$$\mathrm{m}(G) = |U| - \delta \ .$$

Beweis:

Dass $\mathrm{m}(G) \leq |U| - \delta$ gilt, ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch, dass auch $\mathrm{m}(G) \geq |U| - \delta$ gilt, damit ist der Satz bewiesen.

Betrachte folgenden Graphen:



Man fügt nun δ neue Knoten hinzu. Von diesen gehen Kanten zu allen Knoten in U, so dass ein $K_{|U|,\delta}$ entsteht.

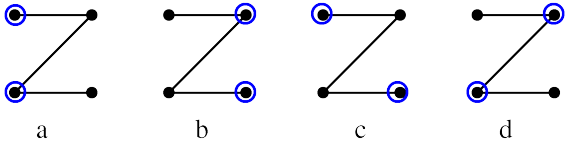
Beweis (Forts.):

Der neue Graph erfüllt die Voraussetzungen des Heiratssatzes. Damit gibt es im neuen Graphen ein Matching M' mit $|M'| = |U|$. Daraus folgt, dass es im alten Graphen ein Matching der Kardinalität $\geq |U| - \delta$ geben muss. $\square$

Definition 319

$D \subseteq U \uplus V$ heißt Träger oder Knotenüberdeckung (*vertex cover, VC*) von G, wenn jede Kante in G zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

Beispiel 320



In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

Satz 321

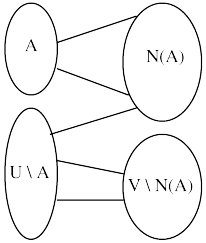
Es gilt:

$$\max\{|M|; M \text{ Matching}\} = \min\{|D|; D \text{ Träger}\}$$

Beweis:

„$\leq$“ Offensichtlich.

„$\geq$“ Für ein geeignetes $A \subseteq U$ gilt $\mathrm{m}(G) = |U| - \delta(G) = |U \setminus A| + |N(A)|$:



$(U \setminus A) \cup N(A)$ ist Träger von G.

□

Sei

$$M = \left(m_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

eine (quadratische) Matrix mit $m_{ij} \geq 0$. Alle Zeilen- und Spaltensummen von M seien gleich $r > 0$.

Man ordnet nun M den bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ zu mit

$$U = \{u_1, \ldots, u_n\}, V = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ und } \{u_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow m_{ij} > 0.$$

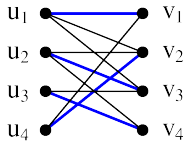
Ein Matching in G entspricht einer Menge von Positionen in M, die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen.

Beispiel 322

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Graphen



Bemerkung:
Ein Träger D von G ist also eine Menge von Zeilen und Spalten von M, die zusammen alle Einträge $m_{ij} > 0$ enthalten.

Definition 323
Eine Menge von Positionen (in M), die alle in verschiedenen Zeilen und in verschiedenen Spalten liegen, heißt Diagonale von M.

Eine Diagonale der Größe n muss in M existieren, denn falls M keine solche Diagonale hat, gibt es nach Satz 321 e Zeilen und f Spalten mit $e + f < n$, die zusammen alle Einträge > 0 von M enthalten.
Die Gesamtsumme der Einträge in M wäre dann

$$n \cdot r = \sum_{i,j} m_{ij} \leq (e + f) \cdot r < r \cdot n,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Sei c_1 der minimale Eintrag > 0 in M, und sei P_1 die zu einer Diagonale der Größe n gehörige Permutationsmatrix (d. h. Einträge $= 1$ an den Positionen der Diagonale, 0 sonst).

Dann gilt:

$$M_1 := M - c_1 P_1$$

ist eine $n \times n$-Matrix mit allen Zeilen- und Spaltensummen $= r - c_1$. Die Matrix M_1 enthält damit mehr Nullen als M.

Damit haben wir gezeigt:

Satz 324

Sei M wie oben. Dann gibt es für ein geeignetes k Konstanten $c_i > 0$ und Permutationsmatrizen P_i, $i = 1, \ldots, k$, so dass gilt

$$M = \sum_{i=1}^{k} c_i P_i \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i = r \; .$$

7.2 Konstruktion optimaler Matchings

Satz 325

Ein Matching M ist genau dann Maximum, wenn es dazu keinen augmentierenden Pfad gibt.

Beweis:

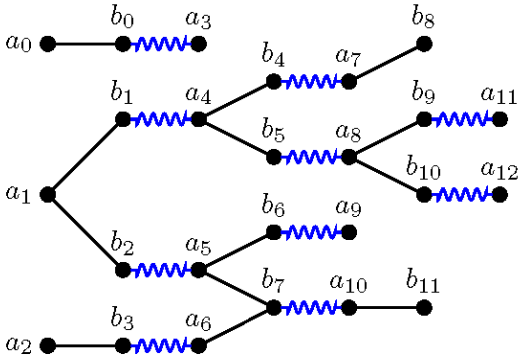
„$\Rightarrow$“ Offensichtlich.

„$\Leftarrow$“ Sei M ein Matching, zu dem es keinen augmentierenden Pfad gibt. Annahme, M sei kein Maximum Matching, es existiere ein Maximum Matching M'. Betrachte nun $M \Delta M'$. Die Zusammenhangskomponenten dieses Graphen sind alternierende Pfade und Kreise gerader Länge. Da $|M'| > |M|$ gilt, muss es einen alternierenden Pfad mit ungerader Länge geben, der mit Kanten aus M' beginnt und endet. Dies ist aber ein *augmentierender* Pfad.

□

Der Algorithmus zur Konstruktion optimaler Matchings ist eine parallele (simultane) alternierende Breitensuche.

Beispiel 326 (Konstruktion im bipartiten Graph)



Ergebnisse und Erweiterungen:

	bipartit	allgemein
ungewichtet	$O(\sqrt{\|V\|} \cdot \|E\|)$	$O(\sqrt{\|V\|} \cdot \|E\|)$
gewichtet	$O(\|V\| \cdot (\|E\| + \|V\| \cdot \log(\|V\|)))$	$O(\|V\| \cdot \|E\| \cdot \log(\|V\|))$

Siehe auch:
Zvi Galil: Efficient algorithms for finding maximum matchings in graphs, ACM Computing Surveys 18 (1986), pp. 23–38

7.3 Reguläre bipartite Graphen

Lemma 327

Sei $G = (U, V, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph ($k \in \mathbb{N}$). Dann hat G ein perfektes Matching.

Beweis:

Sei $A \subseteq U$ und $B = N(A) \subseteq V$. Dann ist $|A| \leq |B|$, da ja alle von A ausgehenden Kanten in B enden und, falls $|B| < |A|$, es in B damit einen Knoten mit Grad $> k$ geben müsste. □

Korollar 328

Sei $G = (U, V, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph ($k \in \mathbb{N}$). Dann lässt sich E als disjunkte Vereinigung von k perfekten Matchings darstellen.

7.4 Transversalen

Definition 329
Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, M ein Matching in G, und $A \subseteq U$ die in M gematchte Teilmenge der Knotenmenge U. Dann heißt A eine Transversale in G.

Satz 330
Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, $\mathcal{T} \subseteq 2^U$ die Menge der Transversalen in G. Dann ist $(U, \mathcal{T})$ ein Matroid.

Beweis:
Die ersten beiden Bedingungen für ein Matroid sind klarerweise erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$
2. $B \subset A, A \in \mathcal{T} \Rightarrow B \in \mathcal{T}$

Beweis (Forts.):

Seien nun A und A' Transversalen mit den zugehörigen Matchings M und M', und sei $|A'| = |A| + 1$, also auch $|M'| = |M| + 1$. Betrachte $M'\Delta M$.
Dann muss $M'\Delta M$ (mindestens) einen Pfad ungerader Länge enthalten, der mit einer Kante in M' beginnt und mit einer Kante in M' endet (und dazwischen abwechselnd Kanten in M bzw. M' enthält). Dieser Pfad ist ein augmentierender Pfad bzgl. M, und einer der beiden Endpunkte liegt in $A' \setminus A$, kann also zu A hinzugenommen werden. □

Anwendung: gewichtetes Zuweisungsproblem, Variante 1

n Nutzer wollen jeweils auf eine aus einer nutzerspezifischen Teilmenge von insgesamt m Ressourcen zugreifen. Jede Ressource kann aber nur von höchstens einem Nutzer in Anspruch genommen werden. Der Wert einer Zuweisung von Ressourcen zu (interessierten) Nutzern ergibt sich als die Summe

$$\sum_{i \in A} w_i \ ,$$

wobei die Zuweisung einem Matching in dem durch Nutzer, Ressourcen und Zugriffswünsche gegebenen Graphen entspricht, $w_i \in \mathbb{R}^+$ ein Gewicht für jeden Nutzer $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist, und A die durch die Zuweisung (das Matching) bedachte Teilmenge der Nutzer ist.

7.5 Gewichtetes Matching in bipartiten Graphen

Wir betrachten nun eine zweite Variante eines Zuweisungsproblems, das durch bipartite Graphen $G = (U, V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+$ gegeben ist. Das Gewicht eines Matchings $M \subseteq E$ ist dann

$$\sum_{e \in M} w(e) \; .$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $|U| = |V|$ $(= n)$ und G vollständig bipartit (also $G = K_{n,n}$) ist, indem wir zunächst die kleinere der beiden Mengen U und V mit zusätzlichen Knoten auffüllen und dann die fehlenden Kanten durch Kanten mit Gewicht 0 ersetzen.

Damit suchen wir in G *optimale perfekte* Matchings. Wir können das Problem, ein perfektes Matching maximalen Gewichts zu finden, reduzieren auf das Problem, ein perfektes Matching minimalen Gewichts zu bestimmen, indem wir jedes Gewicht $w(e)$ durch

$$\max_{e \in E} w(e) \; - \; w(e)$$

ersetzen.

Wir nehmen daher an, dass wir o.B.d.A. ein perfektes Matching minimalen Gewichts in (G, w) suchen.

Für die folgende Diskussion nehmen wir zur Vereinfachung weiter an, dass alle Gewichte $\in \mathbb{N}_0$ sind.

Sei

$$W = \big(w_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

die zu (G, w) gehörige Gewichtsmatrix, und sei

$$P = \big(p_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

eine Permutationsmatrix (d.h., jede Zeile und jede Spalte von P enthält genau eine 1 und ansonsten nur Einträge 0).

Die Permutationsmatrix P entspricht einem perfekten Matching M in G mit Gewicht

$$\sum_{i,j} p_{ij} w_{ij} \ .$$

Beobachtung:
Wenn wir von jedem Element einer Zeile (oder Spalte) in W einen festen Betrag p subtrahieren, verringert sich das Gewicht eines jeden perfekten Matchings M um diesen Betrag p, die relative Ordnung (nach Gewicht) unter den perfekten Matchings bleibt bestehen, insbesondere gehen optimale Matchings wieder in optimale Matchings über.

Wir führen nun solche Zeilen- und Spaltenumformungen durch, um eine Diagonale mit möglichst vielen Einträgen $= 0$ zu erhalten.

Beispiel 331

Sei

$$W = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Nachdem wir von jeder Zeile das minimale Gewicht subtrahieren, erhalten wir

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachdem wir von jeder Spalte das minimale Gewicht subtrahieren, erhalten wir

$$W'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

Diese Matrix enthält eine Diagonale der Größe 3 mit Einträgen $= 0$*:*

$$W'' \quad = \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Aus Satz 321 folgt, dass die maximale Länge einer 0-Diagonale gleich der minimalen Anzahl von Zeilen und Spalten ist, die alle 0en bedecken.
Falls wir noch keine 0-Diagonale der Länge n haben, iterieren wir folgenden Algorithmus:

1. finde eine minimale Anzahl von e Zeilen und f Spalten ($e + f < n$), die zusammen alle Einträge $= 0$ enthalten;
2. sei w das Minimum der nicht überdeckten Elemente;
3. subtrahiere w von den $n - e$ nicht überdeckten Zeilen;
4. addiere w zu den f überdeckten Spalten.

Die Gewichte ändern sich also wie folgt:

1. um $-w$, falls (i, j) nicht überdeckt ist;
2. um 0, falls (i, j) von einer Zeile *oder* Spalte überdeckt ist, aber nicht beides;
3. um $+w$, falls (i, j) von einer Zeile *und* einer Spalte überdeckt ist.

Insbesondere sind die resultierenden Gewichte wieder ≥ 0.
Die Anzahl der doppelt (von Zeilen *und* Spalten) überdeckten Positionen ist $e \cdot f$, die Anzahl der nicht überdeckten Positionen ist

$$n^2 - n(e+f) + ef \ .$$

Der resultierende Gewichtsunterschied ist daher

$$\begin{aligned} \Delta w &= (ef)w - (n^2 - n(e+f) + ef)w \\ &= (n(e+f) - n^2)w < 0 \end{aligned}$$

Damit muss unsere Iteration enden und wir finden eine 0-Diagonale der Länge n, entsprechend einer optimalen Zuordnung.

Beispiel (Forts.)

In unserem Beispiel ergibt sich

$$W'' = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Algorithmus bestimmt $w = 1$*:*

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 2 & \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

In dem durch die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 9 & 11 & \boxed{12} & 11 \\ 6 & \boxed{3} & 8 & 5 \\ \boxed{7} & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

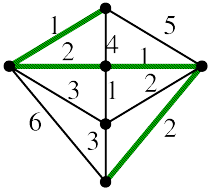
gegebenen bipartiten Graphen hat also das durch die markierten Kanten gegebene perfekte Matching minimales Gewicht.

Bemerkung: Bei geeigneter Implementierung ist die Laufzeit des Algorithmus $O(n^3)$.

7.6 Das Problem des chinesischen Postboten

Gegeben ist ein zusammenhängender, gewichteter Multigraph $G = (V, E, w)$.
Gesucht ist ein Kreis minimalen Gewichts, der jede Kante mindestens einmal enthält.

Beispiel 332 (In der optimalen Lösung werden die dickeren grünen Kanten zweimal verwendet)



Algorithmus: Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades, $|U| = 2k$.

1. Bestimme $\mathrm{d}(u, v)$ für alle $u, v \in U$.
2. Bestimme auf dem K_{2k} mit Kantengewichtung $w(\{u, v\}) = \mathrm{d}(u, v)$ ein perfektes Matching M minimalen Gewichts.
3. Füge die den Kanten in M entsprechenden kürzesten Pfade in G ein und bestimme im resultierenden Graphen einen Eulerkreis. Dieser ist eine Lösung.