4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204

Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

Satz 205

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

Beispiel 206

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}} .$$

Dann ist (für $x \in \mathbb{N}$)

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 209

Was ist $\sum_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\ .
\end{aligned}$$

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}} \,,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 1) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.

Beispiel (Forts.)

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}} \,.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f)\ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \\
&\quad \underbrace{-f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung zur Notation:

Bei der Darstellung

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).

Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta\binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}\,.\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel (Forts.)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 \,.
\end{aligned}
$$