Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 6
22. November 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 30. November 2010, 10 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

1. Zeigen Sie mit direktem Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung
$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} .$$
2. Man zeige mit vollständiger Induktion, dass L_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Wir betrachten die aussagenlogische Formel $F = r \vee (\neg q \vee \neg p)$. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel G an, die als Operator nur Vorkommen des booleschen Operators $\Rightarrow$ enthält, insbesondere also keine Konstanten (0-stellige Operatoren) true oder false enthält.
2. Sei G eine aussagenlogische Formel, in der nur die Variablen p, q, r und der Operator $\Rightarrow$ eventuell mehrfach vorkommen. Beispiel: $G_0 = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$.

   Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}_0$ der Vorkommen des Operators $\Rightarrow$ in G, dass die Belegung $\beta : p \mapsto 1, q \mapsto 1, r \mapsto 1$ die Formel G wahr macht.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Gilt die Mengengleichheit $O(n^2) = O(n^3)$? Beweisen Sie Ihre Aussage!
2. Wahr oder falsch: $2 \cdot 3^n \in O(3 \cdot 2^n)$? Beweisen Sie Ihre Antwort!
3. Sei $2^{O(n)} = \{2^{f(n)};\ f(n) \in O(n)\}$. Gilt $O(2^n) = 2^{O(n)}$? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Geben Sie eine Funktion $f(n)$ an mit $f(n) \in \omega(p(n))$ für alle Polynome $p(n)$ beliebigen Grades und gleichzeitig $f(n) \in o(2^{n^c})$ für alle positiven reellen Zahlen c.
Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* <u>*Vorbereitungsaufgabe*</u>*,* <u>*Tutoraufgabe*</u> *und* <u>*Hausaufgabe*</u> *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei $S' = \langle S, \circ \rangle$ eine Halbgruppe. Dann nennen wir ein Element $x \in S$ vertauschbar bezüglich $\circ$, falls gilt $(\forall a \in S)\,[\,a \circ x = x \circ a]$. Es sei $V(S)$ die Menge aller bezüglich $\circ$ vertauschbarer Elemente von S.

1. Zeigen Sie die Abgeschlossenheit von $V(S)$ unter der Verknüpfung $\circ$, d. h.:

$$x, y \in V(S) \Longrightarrow x \circ y \in V(S)\,.$$

2. Nun nehmen wir an, dass S' eine Gruppe mit Einselement 1 ist. Zeigen Sie, dass die Unterhalbgruppe $\langle V(S), \circ_{V(S)} \rangle$ von S' dann ebenfalls eine Gruppe ist.

3. Sei S' wieder eine Gruppe mit Einselement 1.
   Ist $V(S)$ ein Normalteiler von S'? Begründung!

Vorbereitung 2

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \ldots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$. Dann ist die Abbildung $\pi_z : M \to M$ mit $\pi_z(a_i) = a_{(i+1) \mod |M|)}$ ein *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z. Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π. Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?
   Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?
   Welche verschiedenen Darstellungen hat ${\pi_z}^3$? Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus?

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind. Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zyklenpartition.* Dabei bildet die Menge der Basismengen $P_Z = \{M(\pi) \,|\, \pi \in Z\}$ eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen $M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)$. Wir sagen, dass Z eine Zyklenpartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

   Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!

   Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \to [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls} \quad i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z\,.$$

3. Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \ldots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

   Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.
   Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\}$!

   Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung von* f, d. h. eine Zyklenpartition Z von $[9]$, so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

Vorbereitung 3

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z. $a \equiv b\,(mod\,m)$, falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheiden, d. h., falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $a = b + k \cdot m$ gilt. Diesen Zusammenhang kann man der Definition der Operation $\bmod : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zugrunde legen: $b = a \bmod m$ gilt genau dann, wenn $a \equiv b\,(mod\,m)$ und gleichzeitig $0 \leq b < m$ gilt.
Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \bmod m \ (mod\,m)\,, && (1) \\ (a+b) \bmod m &= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,, && (2) \\ (a \cdot b) \bmod m &= [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,. && (3) \end{aligned}$$

In enger Beziehung zur mod-Operation steht die ganzzahlige Division $a \div m$ zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a = (a \div m) \cdot m + (a \bmod m)\,.$$

Berechnen Sie: (i) $5 \div 4$, (ii) $(-5) \div 4$, (iii) $(-x) \div 1$.

Tutoraufgabe 1

Es sei $G = \langle S, \circ, e \rangle$ eine Gruppe mit genau 4 Elementen $e, a, b, c \in S$, in der speziell für a gilt $a^2 = e$ mit dem neutralen Element e.

1. Geben Sie zwei verschiedene Gruppen mit obiger Eigenschaft an, indem Sie die zugehörigen Verknüpfungstabellen konstruieren.
2. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gruppen mit obiger Eigenschaft gibt.
3. Wir betrachten jetzt **beliebige** Gruppen mit 4 Elementen.

   Zeigen Sie, dass es in diesen stets ein Element mit Ordnung 2 gibt.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die folgenden Permutationen p_i der Menge $[6] \subseteq \mathbb{N}$ in Zyklendarstellung und beziehen uns dabei auf die Schreibweisen in Vorbereitungsaufgabe 2.

$$p_1 = (1,5,4,6)\,(2)\,(3)\,, \qquad p_2 = (2,5,1)\,(3)\,(4)\,(6)\,,$$
$$p_3 = (3,5,2)\,(1)\,(4)\,(6)\,, \qquad p_4 = (4,5,3)\,(1)\,(2)\,(6)\,.$$

1. Geben Sie eine Zyklendarstellung der Permutation p an, die durch Komposition der p_i wie folgt definiert ist:
$$p = p_1 \circ p_2 \circ p_3 \circ p_4\,.$$
2. Bestimmen Sie die kleinste Potenz $k > 0$, so dass $(p_1 \circ p_4)^k$ gleich der identischen Abbildung id ist $(\forall x(id(x) = x))$.

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie, dass im Folgenden Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ definiert werden, die bezüglich des binären Operators $\circ$ eine Gruppe bilden.

1. Sei $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und für alle $x, y \in S$
$$x \circ y = x + y + xy.$$
2. Sei S gleich der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ $(= 2^X)$ einer beliebigen Menge X und sei $\circ$ gegeben durch
$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
3. Sei $1 < n \in \mathbb{N}$ und $S = Z_n^* = \{p \in \mathbb{Z}_n;\ \mathrm{ggT}(p, n) = 1\}$. $\circ$ sei gleich der Multiplikation ganzer Zahlen modulo n.