Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 4
8. November 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 16. November 2010, 10 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Es gibt genau 8 binäre Relationen über der Menge $\{2, 4\}$.
2. Es gibt genau 3 Äquivalenzrelationen über der Menge $[2, 4]$ natürlicher Zahlen.
3. Sei M eine nicht leere Menge. Die reflexive transitive Hülle R^* einer antisymmetrischen Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine partielle Ordnung.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ x + 2y \geq 12\}$. Wir definieren eine binäre Relation R über M, d. h. $R \subseteq M \times M$, wie folgt: $((x, y), (x', y')) \in R \ :\Leftrightarrow\ x \leq x' \wedge y \leq y'$.

1. Ist R reflexiv, symmetrisch, transitiv? Ist R eine partielle Ordnung über M? Ist R total? Begründung!
2. Ein Element $x \in M$ heißt minimal bezüglich R, wenn es kein Element $y \in M$ gibt mit $y \neq x$ und $(y, x) \in R$. Wie viele minimale Elemente bezüglich R gibt es? Begründung!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Menge der Kubikzahlen n^3 für $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig ist wie die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Konstruieren Sie in Ihrem Beweis eine entsprechende Bijektion.
2. Sei $V = \{a + b\sqrt{3}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung von V in $\mathbb{N}$ gibt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über den ganzen Zahlen sei gegeben durch
   $$(x, y) \in R \ :\Leftrightarrow y = x + 1.$$
   Berechnen Sie $R^2 = R \circ R$!
2. Zeigen Sie, dass für beliebige binäre Relationen $R, S, T \subseteq M \times M$ über einer Menge M das folgende Distributivgesetz gilt.
   $$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen. Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)] \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt, stattdessen die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]\,. \tag{2}$$

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
...

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]\,.$

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Dann gilt $P(n+1)$:
...

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$ die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m\,.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an und führen Sie den Induktionsbeweis für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$ nach dem angegebenen Schema durch.

Vorbereitung 2

Im Folgenden bezeichnet 1 die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Limes:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$
2. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:
$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$
3. Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1),$$

Tutoraufgabe 1

Sei $f : \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, die für $n = 0$ bzw. $n = 1$ die Werte $f(0) = 1$ bzw. $f(1) = 4$ annimmt und für alle $n \geq 1$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$f(n+1) = 4 \cdot (f(n) - f(n-1)) \,.$$

Man zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(n) = (n+1) \cdot 2^n \,.$$

Tutoraufgabe 2

1. Für die reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 2^n$ und $g(n) = n^2$ gilt $f(n) \notin o(g(n))$, d. h. $(\exists c > 0 \, \forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \, \exists n \geq n_0) \, [|f(n)| \geq c \cdot g(n)]$.

   Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für $c = 5$ die folgende Aussage nachweisen:

   $$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \, \exists n \geq n_0) \, [2^n \geq 5 \cdot n^2] \,.$$

2. Geben Sie Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ an, für die gilt

   $$f(n) \notin o(|g(n)|) \quad \text{und} \quad g(n) \notin O(|f(n)|) \,.$$

Tutoraufgabe 3

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen und g habe höchstens endlich viele Nullstellen. Zeigen Sie:

$$f(n) \in o(|g(n)|) \quad \iff \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0 \,.$$