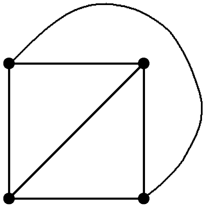
Der K_4 lässt sich auch kreuzungsfrei zeichnen:



Für die Anzahl der Kanten in einem vollständigen Graphen (und damit für die maximale Anzahl von Kanten in einem einfachen Graphen) gilt:

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

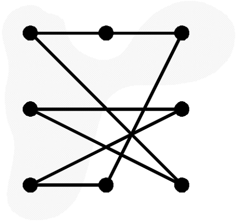
1.4 Bipartiter Graph

Definition 235

Ein Graph heißt bipartit, falls sich V in $V_1 \uplus V_2$ mit $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ so partitionieren lässt, dass gilt:

$$(\forall e \in E)\big[e \in (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)\big]$$

Beispiel 236 (C_8, Kreis mit 8 Knoten)



Bemerkung:

Schreibweise für bipartite Graphen:

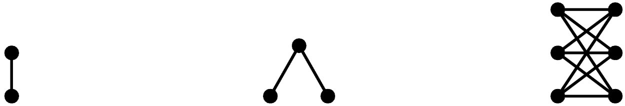
$$G = (V_1, V_2, E)$$

1.5 Vollständiger bipartiter Graph

Definition 237

Ein bipartiter Graph $G = (V_1, V_2, E)$ heißt vollständig, falls $E = V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1$.
(Notation: $K_{m,n}$ mit $m = |V_1|, n = |V_2|$)

Beispiel 238



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{3,3}$

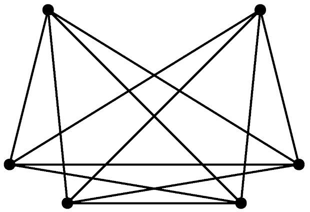
1.6 k-partiter Graph

Definition 239

Ein Graph heißt k-partit ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$), falls es eine Partition $V = V_1 \uplus V_2 \uplus \ldots \uplus V_k$ mit $V_i \neq \emptyset, i = 1, \ldots, k$ gibt, so dass

$$(\forall e \in E)\big[e \in V_i \times V_j; 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\big]$$

Beispiel 240 (Vollständiger tripartiter Graph $K_{2,2,2}$)



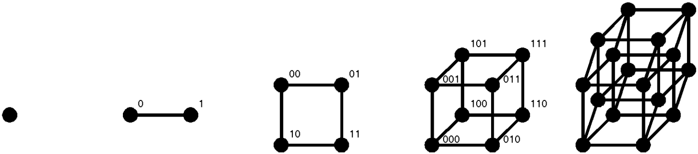
1.7 (Binärer) Hyperwürfel

Definition 241

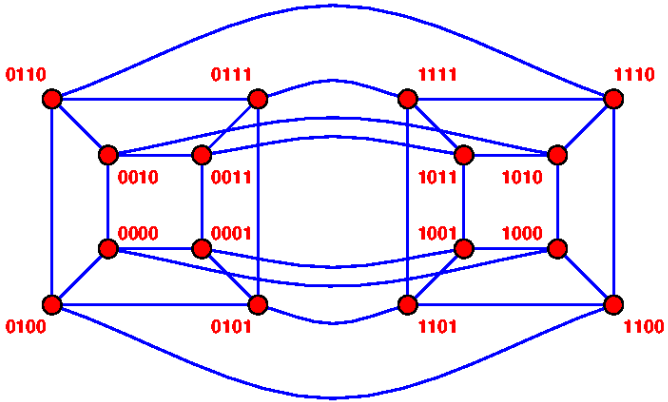
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt n-dimensionaler binärer Hyperwürfel (aka Q_n), falls $V = V_n = \{0, 1\}^n$ mit

$$E = \Big\{\{v, w\} \in {V_n}^2;\ \text{Hamming-Abstand}(v, w) = 1\Big\}.$$

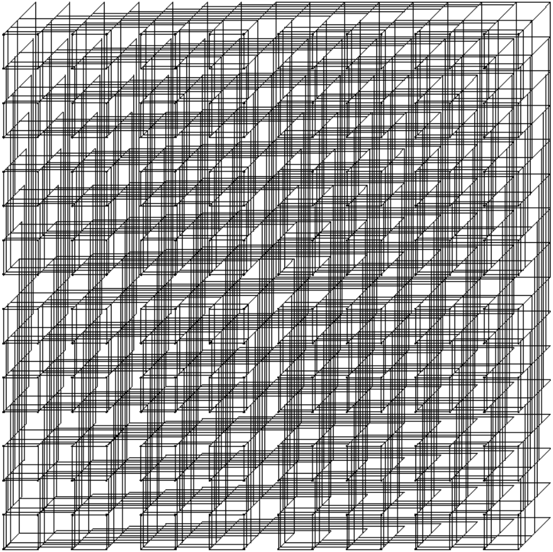
Beispiel 242



Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4



Q_4: 4-dimensionaler Hyperwürfel



Q_8: 8-dimensionaler Hyperwürfel

Für die Anzahl der Knoten in Q_n gilt:

$$|V| = 2^n$$

Für die Anzahl der Kanten in Q_n gilt:

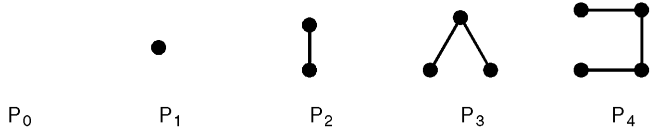
$$|E| = n \cdot \frac{2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$$

1.8 Pfade

Definition 243

1. Ein Pfad der Länge n ist eine Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von Knoten eines Graphen $G = (V, E)$, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.
2. Der Graph P_n ist der Graph (V, E) mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \big\{\{v_i, v_{i+1}\}; i = 1, \ldots, n-1\big\}$.

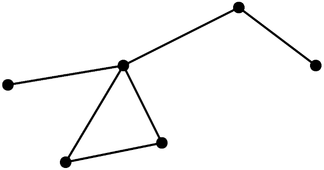
Beispiel 244



Definition 245

Ein Pfad heißt einfach, falls alle Knoten paarweise verschieden sind.

Beispiel 246 (Pfad, aber *nicht einfacher* Pfad der Länge 7)



1.9 Kreise

Definition 247

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt (einfacher) Kreis der Länge n (i. Z. $C_n, n \geq 3$), falls $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ und $E = \big\{\{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}; i = 0, \ldots, n-1\big\}$.

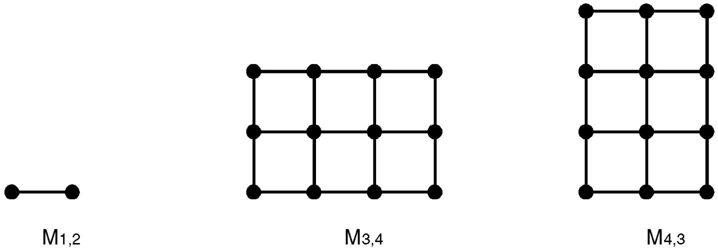
1.10 Gitter

Definition 248

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein m-n-Gitter (zweidimensionales Gitter mit den Seitenlängen m und n, i. Z. $M_{m,n}$), falls $V = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ und

$$\underbrace{\{(i,j),(k,l)\}}_{\substack{\text{Kante zwischen}\\ \text{Knoten } (i,j)\\ \text{und Knoten } (k,l)}} \in E \iff |i-k| + |j-l| = 1$$

Beispiel 249



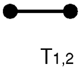
1.11 Torus

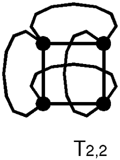
Definition 250

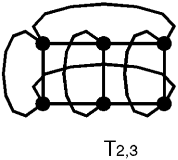
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zweidimensionaler Torus (pl. Tori) mit den Seitenlängen m und n, falls $V = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ und

$$\{(i,j),(k,l)\} \in E \iff |i - k \bmod m| + |j - l \bmod n| = 1$$

Beispiel 251



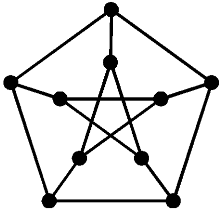




1.12 Petersen-Graph

Definition 252

Der folgende Graph heißt Petersen-Graph:



2. Definitionen für ungerichtete Graphen

2.1 Pfade und Kreise

Definition 253

Ein Pfad (Weg) in einem Graphen ist eine Folge von Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_k$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E, i = 0, \ldots, k-1$.

Ein Pfad heißt einfach, wenn alle v_i paarweise verschieden sind.

Ein Kreis ist ein Pfad, bei dem gilt: $v_0 = v_k$.

Ein Kreis heißt einfach, wenn die Knoten $v_0, \ldots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind.

2.2 Isomorphe Graphen

Definition 254

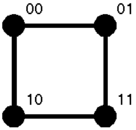
Zwei Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ heißen isomorph, falls es eine Bijektion $\varphi : V_1 \to V_2$ gibt, so dass gilt:

$$(\forall v, w \in V_1)\Big[\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2\Big].$$

Beispiel 255

$K_{2,2} \cong C_4 \cong Q_2$ oder $T_{4,4,4} \cong Q_6$

Beispiel 256



Q_2

2.3 Adjazenz

Definition 257

Sei $G = (V, E)$, $u, v \in V$ und $\{u, v\} \in E$. Dann heißen u und v adjazent (aka benachbart). u und v sind Endknoten von $\{u, v\}$; u und v sind inzident zur Kante $\{u, v\}$. Zwei Kanten heißen adjazent, falls sie einen Endknoten gemeinsam haben.

2.4 Nachbarschaft

Definition 258

Sei $u \in V$.

$$N(u) := \{v \in V; u \neq v, \{u, v\} \in E\}$$

heißt die Nachbarschaft von u.

$\mathrm{d}(u) := \deg(u) := |N(u)|$ heißt Grad von u.

Falls $\mathrm{d}(u) = 0$, so heißt u isoliert.

2.5 Gradfolge

Definition 259

Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o.B.d.A. so, dass

$$\mathrm{d}(v_1) \geq \mathrm{d}(v_2) \geq \ldots \geq \mathrm{d}(v_n).$$

Dann heißt $\big(\mathrm{d}(v_1), \mathrm{d}(v_2), \ldots, \mathrm{d}(v_n)\big)$ die Gradfolge von G.

Bemerkung:

Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge.

Satz 260

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis:

$\sum \mathrm{d}(v)$ zählt Halbkanten. $\square$

Korollar 261

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

2.6 Reguläre Graphen

Definition 262

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt k-regulär genau dann, wenn

$$(\forall v \in V)\Big[\mathrm{d}(v) = k\Big].$$

Beispiel 263

Q_k ist k-regulär; $T_{m_1,\ldots,m_k}$ ist $2k$-regulär.

2.7 Teilgraphen

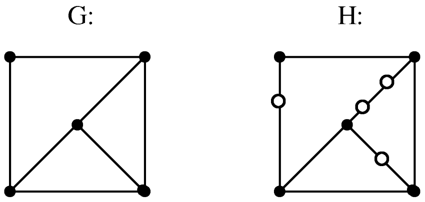
Definition 264

1. $G' = (V', E')$ heißt Teilgraph von $G = (V, E)$, falls

$$V' \subseteq V \quad \wedge \quad E' \subseteq E.$$

2. Ein Graph $H = (\overline{V}, \overline{E})$ heißt Unterteilung von $G = (V, E)$, falls H aus G dadurch entsteht, dass jede Kante $\{v, w\} \in E$ durch einen Pfad $v = \overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k = w$ ersetzt wird. Dabei sind $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{k-1}$ jeweils neue Knoten.

Beispiel 265 (Unterteilung)



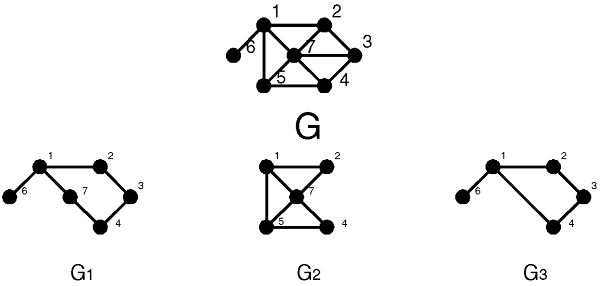
Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

2.8 Induzierte Teilgraphen

Definition 266

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt (knoten-)induzierter Teilgraph von $G = (V, E)$, falls G' Teilgraph von G ist und $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel 267

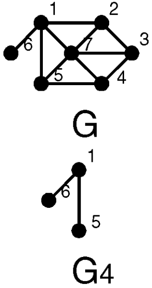


G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Sei $V' \subseteq V$. Dann bezeichnet $G \setminus V'$ den durch $V \setminus V'$ induzierten Teilgraphen von G.

Beispiel 268

$G_4 = G \setminus \{2, 3, 4, 7\}$



2.9 Erreichbarkeit

Definition 269

Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.

Satz 270

Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \iff \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. $\square$

2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen Zusammenhangskomponenten von G. G heißt zusammenhängend, falls G aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

2.11 Bäume

Definition 271

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $G = (V, E)$ *ist ein nichtleerer Baum.*
2. $V \neq \emptyset$ *und für je zwei Knoten* $u, v \in V$ *mit* $u \neq v$ *gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen* u *und* v.
3. G *ist zusammenhängend und* $|V| = |E| + 1$.