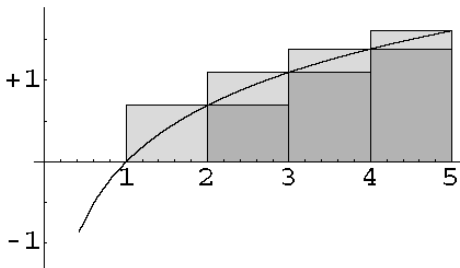


Beispiel 42

Behauptung: $n! = O\left((n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Beweis:

$$(\forall n > 0) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x \, dx < \sum_{k=2}^n \ln k < \int_1^{n+1} \ln x \, dx \right]$$



Es ist

$$\int_1^n \ln x \, dx = (x \cdot \ln x - x) \Big|_1^n = n \cdot \ln n - n + 1$$

und

$$\int_1^{n+1} \ln x \, dx = (n+1) \cdot \ln(n+1) - n$$

Also:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n \cdot \ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1) \cdot \ln(n+1) - n \right]$$

und damit

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

oder:

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

□

Die Stirling'sche Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n! / \left(\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) \right) = \sqrt{2\pi}$$

oder mit anderen Worten:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot (1 + o(1))$$

Kapitel II Algebraische Grundlagen

1. Algebren

1.1 Grundbegriffe

Definition 43

Eine **Algebra** besteht aus einer Trägermenge S und einer Menge Φ von Operationen auf S (der Operatorenmenge). Dabei gilt: Jeder Operator ist eine (totale) Abbildung

$$S^m \rightarrow S$$

der Stelligkeit (Arität, **arity**) $m \in \mathbb{N}_0$.

- Nullstellige Operatoren sind **Konstanten**, z. B. 0, 47, \perp .
- Einstellige Operatoren sind **unäre** Operatoren, z. B. $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \neg x$, $A \mapsto 2^A$.
- Zweistellige Operatoren sind **binäre** Operatoren, z. B. $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto \text{ggT}(x, y)$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- Dreistellige Operatoren sind **ternäre** Operatoren, z. B. $(x, y, z) \mapsto \mathbf{if\ } x \mathbf{\ then\ } y \mathbf{\ else\ } z \mathbf{\ fi}$

Beispiel 44

Sei U eine Menge, F die Menge der Funktionen von $U \rightarrow U$.
 (F, \circ) ist eine Algebra mit \circ als **Komposition** von Funktionen.

Beispiel 45

Boolesche Algebra:

$\langle \{t, f\}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\} \rangle$ ist eine (endliche) Algebra.

1.2 Eigenschaften

Signatur einer Algebra

Definition 46

Die **Signatur** einer Algebra besteht aus der Liste der Stelligkeiten der Operatoren.

Beispiel 47

$\langle \mathbb{B}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\} \rangle$ (Boolesche Algebra, $\mathbb{B} = \{t, f\}$): 0, 0, 1, 2, 2

$$\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

Beispiel 48

$\langle 2^U, \{U, \emptyset, -, \cap, \cup\} \rangle$: 0, 0, 1, 2, 2

$$- : 2^U \rightarrow 2^U$$

$$\cap : 2^U \times 2^U \rightarrow 2^U$$

$$\cup : 2^U \times 2^U \rightarrow 2^U$$

Diese beiden Algebren haben dieselbe Signatur; die Trägermenge ist unwesentlich, es kommt nur auf die Reihenfolge der Stelligkeiten an.

Einselement, Nullelement, Inverses

Sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra, \circ beliebiger zweistelliger Operator.

Definition 49

- Ein Element $1 \in S$ heißt **linkes** (bzw. **rechtes**) **Einselement** für den Operator \circ , falls

$$(\forall a \in S) \quad 1 \circ a = a \quad (\text{bzw. } a \circ 1 = a)$$

1 heißt **Einselement**, falls es linkes und rechtes Einselement ist.

- Ein Element $0 \in S$ heißt **linkes** (bzw. **rechtes**) **Nullelement** für den Operator \circ , falls

$$(\forall a \in S) \quad 0 \circ a = 0 \quad (\text{bzw. } a \circ 0 = 0)$$

0 heißt **Nullelement**, falls es linkes und rechtes Nullelement ist.

- Sei 1 Einselement. Für $a \in S$ heißt $a^{-1} \in S$ **Rechtsinverses** von a , falls

$$a \circ a^{-1} = 1$$

Analog: **Linksinverses**

Beispiel 50

Betrachte $F(U)$, d. h. die Menge aller Abbildungen $U \rightarrow U$. Dann gilt (mit der Komposition als Operator):

- $f \in F(U)$ hat genau dann ein **Rechtsinverses**, wenn f **surjektiv** ist.

$$f \circ f^{-1} = id$$

(Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g , so dass gilt: $g(x)$ wird von f auf x abgebildet.)

- $f \in F(U)$ hat genau dann ein **Linksinverses**, wenn f **injektiv** ist.

$$f^{-1} \circ f = id$$

(Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g , so dass gilt: $f(x)$ wird von g auf x abgebildet.)

Ist f bijektiv, dann stimmen die beiden f^{-1} aus (1) und (2) überein.

Satz 51

Falls c linkes Einselement ist und d rechtes Einselement (bezüglich des binären Operator \circ), dann ist

$$c = d .$$

Beweis:

$$d = c \circ d = c .$$



Satz 52

Falls c linkes Nullelement und d rechtes Nullelement (bezüglich \circ) ist, dann ist

$$c = d .$$

Beweis:

$$c = c \circ d = d .$$



Beispiel 53

Betrachte $\langle \{b, c\}, \{\bullet\} \rangle$ mit

\bullet		b	c
b		b	b
c		c	c

Es gilt: b und c sind linke Nullelemente, und b und c sind rechte Einselemente.

Abgeschlossenheit

Definition 54

Sei $\langle S, \Phi \rangle$ eine Algebra, T eine Teilmenge von S .

- T ist unter den Operatoren in Φ **abgeschlossen (stabil)**, falls ihre Anwendung auf Elemente aus T wieder Elemente aus T ergibt.
- $\langle T, \Phi \rangle$ heißt **Unteralgebra** von $\langle S, \Phi \rangle$, falls $T \neq \emptyset$ und T unter den Operatoren $\in \Phi$ abgeschlossen ist.

Beispiel 55

- $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ ist **Unteralgebra** von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, \cdot \rangle$ ist **Unteralgebra** von $\langle \mathbb{N}_0, \cdot \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, + \rangle$ ist **keine Unteralgebra** von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, da sie nicht abgeschlossen ist ($1 + 1 = 2$).

2. Morphismen

Seien $A = \langle S, \Phi \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$ zwei Algebren mit derselben Signatur.

2.1 Isomorphismus

Definition 56

Eine Abbildung

$$h : S \rightarrow \tilde{S}$$

heißt ein **Isomorphismus** von A nach \tilde{A} , falls

- h bijektiv ist und
- h mit den in Φ und $\tilde{\Phi}$ einander entsprechenden Operatoren vertauschbar ist (**kommutatives Diagramm**):

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\circ} & S \\ (h, \dots, h) \downarrow & & \downarrow h \\ \tilde{S}^m & \xrightarrow{\tilde{\circ}} & \tilde{S} \end{array}$$

h ist also ein Isomorphismus gdw

- $h(c) = \tilde{c}$ für alle nullstelligen Operatoren (Konstanten) c
- $h(u(x)) = \tilde{u}(h(x))$ für alle unären Operatoren $u \in \Phi$, $\forall x \in S$
- $h(b(x, y)) = \tilde{b}(h(x), h(y))$ für alle binären Operatoren $b \in \Phi$, $\forall x, y \in S$

Notation: $A \cong \tilde{A}$: „ A isomorph zu \tilde{A} “, d. h. es existiert ein Isomorphismus von A nach \tilde{A} (und von \tilde{A} nach A).

Ein Isomorphismus von A nach A heißt **Automorphismus**.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir statt $\langle S, \{o_1, \dots, o_k\} \rangle$ auch

$$\langle S, o_1, \dots, o_k \rangle ,$$

solange keine Verwechslung zu befürchten ist.

Beispiel 57

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\langle 2 \cdot \mathbb{N}_0, + \rangle$ ($2 \cdot \mathbb{N}_0$: gerade Zahlen) mit

$$h : \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto 2 \cdot n \in 2\mathbb{N}_0$$

ist ein Isomorphismus zwischen den beiden Algebren.

Beispiel 58

$\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$)

$$h : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \log x \in \mathbb{R}$$

ist ein Isomorphismus (der sog. **Rechenschieberisomorphismus**)

Satz 59

Ein Algebra-Isomorphismus bildet Einselemente auf Einselemente, Nullelemente auf Nullelemente und Inverse auf Inverse ab.

Beweis:

Sei die Abbildung $h : S \rightarrow \tilde{S}$ ein Isomorphismus von $A = \langle S, \Phi \rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$.

Sei 1 ein rechtes Einselement für den Operator $\circ \in \Phi$ in A . Dann gilt für alle $\tilde{b} \in \tilde{S}$:

$$\tilde{b} \tilde{\circ} h(1) = h(b) \tilde{\circ} h(1) = h(b \circ 1) = h(b) = \tilde{b}$$

Also ist $h(1)$ ein rechtes Einselement in \tilde{A} . Die Argumentation für linke Einselemente, Nullelemente und Inverse ist analog. \square