Normalformen boolescher Funktionen

Jeder boolesche Ausdruck kann durch (äquivalente) Umformungen in gewisse Normalformen gebracht werden!

Disjunktive Normalform (DNF) und Vollkonjunktion:
Eine Vollkonjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (jeweils als negiertes oder nicht negiertes Literal),
- alle Literale durch Konjunktionen $\wedge$ („und“) verbunden sind.

Die disjunktive („oder“, $\vee$) Verbindung von Vollkonjunktionen nennt man disjunktive Normalform (DNF). Statt $\neg a$ schreiben wir hier (auch, der Kürze halber) $\overline{a}$.

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \wedge b \wedge \overline{c})}_{\textit{Vollkonjunktion}} \vee \underbrace{(\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c})}_{\textit{Vollkonjunktion}} \vee \ldots \vee \underbrace{(\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c)}_{\textit{Vollkonjunktion}}}_{\textit{disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen}}$$

Ableitung der disjunktiven Normalform aus einer Wertetabelle

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Vollkonjunktion
- Terme mit Funktionswert „0“ tragen nicht zum Funktionsergebnis bei („oder“ von 0)

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- bilde Vollkonjunktionen für Zeilen mit Funktionswert „1“ $\rightarrow$ Zeilen 2 und 3 („0“ in Tabelle $\equiv$ Negation der Variablen)
- keine solche Zeile: $f(a, b) = 0$
- Zeile 2: $\overline{a} \wedge b$
- Zeile 3: $a \wedge \overline{b}$
- disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen: $f(a, b) = (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b})$

Konjunktive Normalform (KNF/CNF) und Volldisjunktion

Eine Volldisjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (in Form eines negierten oder nicht negierten Literals),
- alle Literale durch Disjunktionen $\vee$ („oder“) verbunden sind.

Die konjunktive („und“) Verbindung von Volldisjunktionen nennt man konjunktive Normalform, kurz KNF (engl.: CNF).

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \vee b \vee \overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee b \vee \overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)}_{\textit{Volldisjunktion}}}_{\textit{konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen}}$$

Ableitung der konjunktiven Normalform

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Volldisjunktion
- Terme mit Funktionswert „1“ tragen nicht zum Funktionsergebnis bei („und“ mit 1)

a	b	$f(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- bilde Volldisjunktionen für Zeilen mit Funktionswert „0“ $\rightarrow$ Zeilen 1 und 3 („1“ in Tabelle $\equiv$ Negation der Variablen)
- keine solche Zeile: $f(a,b) = 1$
- Zeile 1: $a \vee b$
- Zeile 3: $\overline{a} \vee b$
- konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen:
  $f(a,b) = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b)$

Vergleich von DNF und KNF:

	DNF	**KNF**
wähle Zeilen mit Funktionswert	1	0
Bildung der Teil-Terme	Negation der „0“ Einträge Verknüpfung der Literale mit „und“	Negation der „1“ Einträge Verknüpfung der Literale mit „oder“
Verknüpfung der Teil-Terme	mit „oder“	mit „und“

De Morgan'sche Regeln

Durch Auswerten der Wahrheitswertetabelle stellen wir fest, dass

$$(p \lor q) \equiv \overline{\overline{p} \land \overline{q}}$$

allgemeingültig ist; ebenso

$$(p \land q) \equiv \overline{\overline{p} \lor \overline{q}}\,.$$

Diese beiden Tautologien werden als die De Morgan'schen Regeln bezeichnet, benannt nach Augustus de Morgan (1806–1871).

Modus Ponens

Durch Auswerten der Wahrheitstabelle stellen wir ebenfalls fest, dass

$$((p \Rightarrow q) \land p) \Rightarrow q$$

allgemeingültig ist.
Intuitiv bedeutet dies, dass wir, falls wir wissen, dass $p \Rightarrow q$ wahr ist (d.h., aus p (aussagenlogisch) stets q folgt) und dass auch p gilt, die Gültigkeit von q folgern können.

Dieses Prinzip des Modus Ponens wird in Beweisen sehr häufig verwendet.

Wichtige Bemerkung:

Ist eine boolesche Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$ mit den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allgemeingültig, und sind $F_1, \ldots, F_n$ boolesche Formeln (mit den Variablen $x_1, \ldots, x_r$), dann ist auch

$$F(F_1, \ldots, F_n)$$

allgemeingültig (mit den Variablen $x_1, \ldots, x_r$).

Quantoren

Sei $F(p, q, \ldots)$ eine boolesche Formel mit den Variablen p, q, $\ldots$.
Manchmal (oder auch öfters) wollen wir (aus F abgeleitete) Eigenschaften G ausdrücken, die aussagen, dass

1. es eine Belegung für p gibt, so dass dann die resultierende Formel gilt, also

$$G(q, \ldots) = F(0, q, \ldots) \vee F(1, q, \ldots)\,;$$

2. für jede Belegung von x dann die resultierende Formel gilt, also

$$G(q, \ldots) = F(0, q, \ldots) \wedge F(1, q, \ldots)\,;$$

Hierfür verwenden wir die folgende Notation:

1. $G(q, \ldots) = (\exists p)[F(p, q, \ldots)]$
2. $G(q, \ldots) = (\forall p)[F(p, q, \ldots)]$

Prädidatenlogik

Oft wollen wir Eigenschaften betrachten, die Elemente über einem anderen Universum als das der booleschen Werte $\mathbb{B}$ betreffen.

Sei $\mathcal{U}$ ein solches Universum, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine allgemeine Darstellung seiner Elemente.

Definition 21

- Ein Prädikat P über $\mathcal{U}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}$.
- Die Formel $P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$ ist **true** gdw $(x_1, \ldots, x_n)$ Element der entsprechenden Teilmenge ist.

Beispiel 22

Sei das Universum die Menge $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, sei $P(n)$ das Prädikat „$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist prim", und sei „$<$"das Prädikat „kleiner als" (geschrieben in Infix-Notation), dann bedeutet

- $(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N})[P(p) \wedge (p > n)]$
  „Es gibt unendlich viele Primzahlen!"
- $(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p, q \in \mathbb{N})[p > n \wedge P(p) \wedge q = p + 2 \wedge P(q)]$
  „Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge!"

Bemerkungen:

1. Die Bedeutung von $\equiv$ (und damit $\not\equiv$) ist klar. $\equiv$ wird oft, vor allem in Beweisen, auch als

$$\Leftrightarrow$$

   geschrieben (im Englischen: iff, if and only if).

2. Für zwei boolesche Aussagen A und B ist $A \Rightarrow B$ falsch genau dann wenn $A = t$ und $B = f$.
3. $A \Rightarrow B$ ist damit äquivalent zu $\neg A \vee B$.
4. $A \Rightarrow B$ ist damit auch äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Wichtige Beobachtung:

Gilt also (oder beweisen wir korrekt) $A \Rightarrow f$ (also: „aus der Bedingung/Annahme A folgt ein Widerspruch“), so ist A falsch!

4.6 Beweistechniken

Die meisten mathematischen Behauptungen sind von der Form

$$A \Rightarrow B \text{ bzw. } (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B\,.$$

Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir zeigen:

1. Unter der Annahme A können wir B zeigen (direkter Beweis).
2. Unter der Annahme $\neg B$ können wir $\neg A$ zeigen (indirekter Beweis).
3. Unter der Annahme $\neg B$ können wir einen Widerspruch zeigen (Widerspruchsbeweis).

Beispiel 23 (Direkter Beweis)

Satz 24

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

$n \in \mathbb{N}_0$ ungerade $\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0)\,[n = 2m+1] \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = \underbrace{\underbrace{4m^2 + 4m}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}} \Rightarrow n^2$ ungerade. $\square$

Beispiel 25 (Indirekter Beweis)

Satz 26

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:

Zunächst überzeugen wir uns (siehe Hausaufgabe), dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)[\text{„}n \text{ gerade“} \equiv \text{„}n+1 \text{ ungerade“}]\,.$$

Nachdem wir dieses Lemma bewiesen haben, ist die Aussage des Satzes gleichbedeutend mit

„Falls $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.“

Diese Aussage wurde in Satz 24 bewiesen. □