

Was sind (keine) Diskreten Strukturen?

- Die Analysis (Integral- und Differentialrechnung), (komplexe) Funktionentheorie oder die Funktionalanalysis sind Teilgebiete der Mathematik, die sich mit **kontinuierlichen** Mengen und Größen befassen.
- Die Analysis (und Bereiche wie das **Wissenschaftliche Rechnen** sind Grundlagen der Ausbildung von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren.
- In der Algebra, der Kombinatorik und z.B. der Graphentheorie sind jedoch häufig und z.T. fast ausschließlich diskrete Objekte oder Strukturen das Ziel der Betrachtungen und Untersuchungen.

- In der Informatik spielen (letztlich auf Grund der umfassenden Verbreitung digitaler Rechner) diskrete Mengen und Strukturen die Hauptrolle (z.B. Texte, rasterorientierte Graphik, Kombinatorik, (Aussagen-)Logik, Schaltkreise und ICs, ...).
- Rechenzeit und Speicherplatz digitaler Rechner kommen in diskreten Einheiten vor.
- **Aber:** Ob der physikalische Raum oder die Zeit diskret sind, ist eine Frage (verschiedener) Weltmodelle der Physik!

2. Zusammenwirken mit / Abgrenzung von anderen Bereichen

Letztlich werden fast alle Bereiche der Mathematik benutzt; andererseits hat die Diskrete Mathematik großen Einfluss auf zahlreiche Bereiche der Mathematik und Informatik. Gelegentlich werden jedoch andere als die gebräuchlichen methodischen Grundlagen benötigt, z. B. da die betrachteten Funktionen im Allgemeinen nicht stetig sind.

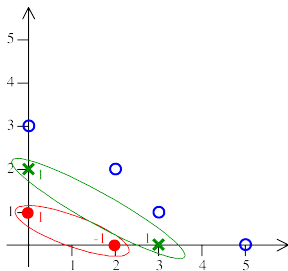
Beispiel 1

Polynome als Funktionen (mit Ableitung, Tangenten, ...) sind nicht unbedingt Stoff der Diskreten Mathematik; ein Beispiel für eine **diskrete Betrachtung** sind dagegen die sogenannten *Newton-Polytope*:

$$\begin{array}{ll} y - x^2: & y^2 + x^3: \\ +y \mapsto (1, 0, 1) & +y^2 \mapsto (1, 0, 2) \\ -x^2 \mapsto (-1, 2, 0) & +x^3 \mapsto (1, 3, 0) \end{array}$$

Die Monome über $\{x, y\}$ werden also als (Faktor, x -Potenz, y -Potenz) dargestellt.

Beispiel 2



Die blauen Kreise entstehen durch Vektoraddition der grünen Kreuze und der roten Punkte und stellen die Polytope des Produkts

$$(y - x^2) (y^2 + x^3) = y^3 + yx^3 - y^2x^2 - x^5$$

dar (Minkowski-Addition).

3. Komplexität: Ein warnendes Beispiel

$$\begin{aligned}(k+2) \cdot & \left(1 - (wz + h + j - q) \right)^2 \\ & - \left((gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z \right)^2 \\ & - \left(2n + p + q + z - e \right)^2 \\ & - \left(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2 \right)^2 \\ & - \left(e^3(e+2)(a+1)^2 + 1 - o^2 \right)^2 \\ & - \left((a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2 \right)^2 \\ & - \left(16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2 \right)^2 \\ & - \left(n + l + v - y \right)^2 \\ & - \left(\left((a + u^2(u^2 - a))^2 - 1 \right) (n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2 \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left((a^2 - 1)l^2 + 1 - m^2 \right)^2 \\
& - \left(q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x \right)^2 \\
& - \left(z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm \right)^2 \\
& - \left(ai + k + 1 - l - i \right)^2 \\
& - \left(p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m \right)^2 \Big)
\end{aligned}$$

Die positiven Werte, die dieses Polynom mit $(a, \dots, z) \in \mathbb{N}_0^{26}$ annimmt, sind genau alle Primzahlen.

Deshalb empfiehlt sich oft die Verwendung eines symbolischen Mathematikprogramms, z. B. Maple.

4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
\emptyset	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element

Spezielle Mengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- \mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen
- \mathbb{Q} = Menge der Brüche (rationalen Zahlen)
- \mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen
- \mathbb{C} = Menge der komplexen Zahlen
- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ Restklassen bei Division durch n
- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Elemente werden nach ihrer Herkunft unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup_{i=0}^n A_i$ Vereinigung der Mengen A_0, A_1, \dots, A_n
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i mit $i \in I$
- $P(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzmenge der Menge M

Beispiel 4

Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

$$P(M) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ \{a, b, c, d\} \\ \}$$

Satz 5

Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:

Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. □

Bemerkungen:

- 1 Der obige Satz gilt auch für $n = 0$, also die leere Menge $M = \emptyset$.
- 2 Die leere Menge ist in jeder Menge **als Teilmenge** enthalten.
- 3 $P(\emptyset)$ enthält **als Element** genau \emptyset (also $P(\emptyset) \neq \emptyset$).

4.2 Relationen und Abbildungen

Seien A_1, A_2, \dots, A_n Mengen. Eine Relation über A_1, \dots, A_n ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb .

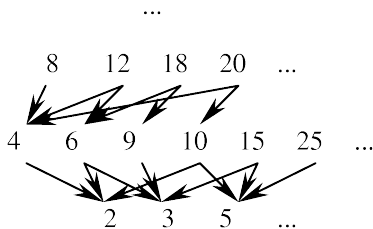
Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

- reflexiv: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$
- symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A$
- asymmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$
- antisymmetrisch: $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$
- transitiv: $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A$
- Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Partielle Ordnung (aka *partially ordered set*, *poset*): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Beispiel 6

$(a, b) \in R$ sei $a|b$ „ a teilt b “, $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Die graphische Darstellung ohne reflexive und transitive Kanten heißt **Hasse-Diagramm**:



Die Relation $|$ stellt eine *partielle Ordnung* dar.

Definition 7

Sei $R \subseteq A \times B$ eine **binäre** Relation. Dann heißt

$$\{a \in A; (\exists b \in B)[(a, b) \in R]\}$$

das **Urbild** der Relation R und

$$\{b \in B; (\exists a \in A)[(a, b) \in R]\}$$

das **Bild** der Relation R .

Definition 8

Sei $R \subseteq A \times B$ eine **binäre** Relation. Dann heißt

$$R^{-1} := \{(b, a); (a, b) \in R\}$$

die **inverse** (oder auch **konverse**) **Relation** zu R .

Definition 9

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C; (\exists b \in B)[(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S]\}$$

das **Produkt** der Relationen R und S . Es wird oft auch einfach durch RS bezeichnet.

Satz 10

Das Relationenprodukt \circ ist *assoziativ* und *distributiv über \cup und \cap* .

Beweis:

Hausaufgabe!

