# Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11

# 1-center / local center

- Unter der Voraussetzung, dass die Distanzmatrix bekannt ist, kann man mit Hilfe der Funktionen

$$\begin{aligned} D_e(v,t) &= w(v) \cdot \min \left\{ \begin{array}{lcl} t & + & d(v_r, v), \\ \ell(e) - t & + & d(v_s, v) \end{array} \right\} \\ D_e(t) &= \max_{v \in V} \{ D_e(v,t) \} \end{aligned}$$

den Wert $D_e(t)$ in $\mathcal{O}(n)$ Schritten an jedem der $\mathcal{O}(n^2)$ in Frage kommenden Punkte berechnen.

- D.h., bei einer direkten Implementierung von Bedingung 2 kann man ein local-center auf $e$ in $\mathcal{O}(n^3)$ Schritten finden.

# 1-center / local center

- Kariv und Hakimi haben eine Methode vorgeschlagen, die in knoten-gewichteten Graphen ein local-center für eine Kante $e$ in $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten findet.
- Damit kann man ein 1-center eines Graphen in $\mathcal{O}(mn \log n)$ berechnen.

- Für ein knoten-ungewichtetes Netzwerk haben Kariv und Hakimi einen Algorithmus von Komplexität $\mathcal{O}(n)$ zum Finden eines local-centers für eine Kante $e$ präsentiert.
- Damit kann man ein 1-center in $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ berechnen.

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Ein local center $x^*(e)$ ist entweder
  - an einem der Endpunkte $v_r$ oder $v_s$ der Kante oder
  - an einem Punkt $t^* \in [0, \ell(e)]$, wo sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ schneiden.
- Aufgrund des gleichen Gewichts für alle Knoten hat der Betrag des Anstiegs für alle Funktionen $D_e(v_i, t)$ den gleichen Wert.
- Damit gilt für zwei beliebige solche Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$, die sich nicht in einem ganzen Liniensegment überlagern, dass sie sich höchstens in einem Punkt schneiden und dass sie die beiden Anstiege in diesem Punkt umgekehrte Vorzeichen haben.

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Definiere für jeden Knoten $v_i \in V$:

$$V_i = \{v \in V : \ D_e(v,0) \leq D_e(v_i,0)\} \qquad \bar{V}_i = V \setminus V_i$$

Falls $\bar{V}_i \neq \emptyset$, definiere auch Knoten $\bar{v}_i$ mit:

$$D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) = \max_{v \in \bar{V}_i} \{D_e(v, \ell(e))\}$$

(Falls es mehrere Knoten gibt, die diese Bedingung erfüllen, wählen wir den mit dem kleinsten Index.)

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Lemma

*Sei $t_0$ die Stelle, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass an der Stelle $t_0$ der Anstieg der Funktion $D_e(v_i, t)$ positiv ist, während der von $D_e(v_j, t)$ negativ ist.*

*Dann gilt*

$$\begin{array}{lllllll} D_e(v_i,t) & < & D_e(v_j,t) & \textit{für} & 0 & \leq t < & t_0 \\ D_e(v_i,t) & > & D_e(v_j,t) & \textit{für} & t_0 & < t \leq & \ell(e) \end{array}$$

## Folgerung

*Unter den Bedingungen des vorigen Lemmas gilt*

$$v_j \in \bar{V}_i \text{ und } v_i \in V_j$$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Lemma

*Ein local center auf Kante e ist entweder auf einem der Endpunkte von e (bei $t = 0$ oder $t = \ell(e)$) oder an einer Stelle $t_i$, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ schneiden.*

## Beweis.

- Der Fall der Kantenendpunkte ist klar.
- Wir betrachten ein local center auf $e$ an der Stelle $t^*$ mit $t^* \neq 0$ und $t^* \neq \ell(e)$.
- $t^*$ ist die Stelle, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass an der Stelle $t^*$ der Anstieg der Funktion $D_e(v_i, t)$ positiv ist, während der von $D_e(v_j, t)$ negativ ist.

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Beweis.

- Damit ist $v_j \in \bar{V}_i$.
- Es gilt also $\bar{V}_i \neq \emptyset$ und damit ist $\bar{v}_i$ definiert.
- Nach der Definition eines local centers (bzw. von $D_e(t)$) gilt $D_e(\bar{v}_i, t^*) \leq D_e(v_j, t^*)$.
- Im Falle von Gleichheit gilt das Lemma.
- Annahme: $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_j, t^*) = D_e(v_i, t^*)$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

**Beweis.**

- Falls $D_e(\bar{v}_i, t)$ bei $t^*$ positiv ansteigt, dann folgt aus $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_i, t^*)$, dass $D_e(\bar{v}_i, 0) < D_e(v_i, 0)$, ein Widerspruch zur Definition von $\bar{v}_i$.
- Falls $D_e(\bar{v}_i, t)$ bei $t^*$ negativ ansteigt, dann folgt aus $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_j, t^*)$, dass $D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) < D_e(v_j, \ell(e))$, ein Widerspruch zur Definition von $\bar{v}_i$ (weil nach Folgerung des letzten Lemmas $v_j \in \bar{V}_i$).
- Also gilt die Annahme nicht, sondern die Gleichheit und damit das ganze Lemma.

$\square$

Das Lemma reduziert die Anzahl möglicher Kandidaten für ein local center auf einer Kante $e$ auf höchstens $n + 2$.

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Lemma

*Wenn sich die Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ an der Stelle $t_i$ überschneiden, dann gilt*

$$D_e(v_i, t_i) = \max_{v \in V}\{D_e(v, t_i)\}$$

*oder kurz*

$$D_e(t_i) = D_e(v_i, t_i)$$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Beweis.

- Annahme: Lemma gilt nicht, sondern es gibt einen Knoten $v'$ mit $D_e(v_i, t_i) < D_e(v', t_i)$.
- Da $D_e(v_i, t_i)$ an der Stelle $t_i$ einen positiven Anstieg hat, impliziert die Ungleichung, dass $D_e(v_i, 0) < D_e(v', 0)$, also $v' \in \bar{V}_i$.
- Andererseits impliziert $D_e(v_i, t_i) < D_e(v', t_i)$, dass $D_e(\bar{v}_i, t_i) < D_e(v', t_i)$ (weil $D_e(v_i, t_i) = D_e(\bar{v}_i, t_i)$).
- Da $D_e(\bar{v}_i, t)$ an der Stelle $t_i$ einen negativen Anstieg hat, folgt $D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) < D_e(v', \ell(e))$.
- Das ist ein Widerspruch zur Wahl von $\bar{v}_i$.

$\square$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Folgerung (aus den letzten beiden Lemmas)

*Sei* $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \ell(e)$ *und für die Werte* $i \in \{1 \dots n\}$ *mit* $\bar{V}_i \neq \emptyset$ *sei* $t_i$ *der Schnittpunkt, wo* $D_e(v_i, t)$ *und* $D_e(\bar{v}_i, t)$ *sich schneiden.*

*Sei* $D_0 = \max_{v \in V}\{D_e(v, 0)\}$, $D_{n+1} = \max_{v \in V}\{D_e(v, \ell(e))\}$ *und für die Werte* $i \in \{1 \dots n\}$, *wo* $t_i$ *definiert ist, sei* $D_i = D_e(v_i, t_i)$.

*Sei* $j$ *ein Index, für den*

$$D_j = \min_{i \in \{0 \dots n+1\}} \{D_i \mid D_i \text{ ist definiert}\}$$

*Dann ist* $D_j$ *der local radius auf* $e$ *und das entsprechende* $t_j$ *ist ein local center auf* $e$.

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Lemma

*Wenn für zwei Knoten $v_i$ und $v_j$ gilt, dass*

$$\begin{aligned} D_e(v_i, 0) &= D_e(v_j, 0) \\ D_e(v_i, \ell(e)) &\geq D_e(v_j, \ell(e)), \end{aligned}$$

*dann muss der Schnittpunkt $t_j$ aus der vorangegangenen Folgerung (wo sich $D_e(v_j, t)$ und $D_e(\bar{v}_j, t)$ schneiden) nicht betrachtet werden.*

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

## Beweis.

- Aus den Bedingungen des Lemmas folgt für alle $t$ $(0 \leq t \leq \ell(e))$, dass $D_e(v_i, t) \geq D_e(v_j, t)$.
- Angenommen, $t_j$ ist ein local center auf $e$, dann impliziert die Definition von local center, dass $D_e(v_j, t_j) \geq D_e(v_i, t_j)$ und man erhält $D_e(v_i, t_j) = D_e(v_j, t_j)$.
- Andererseits impliziert die Definition von $\bar{v}_i$, dass $\bar{v}_i = \bar{v}_j$ und deshalb $D_e(\bar{v}_i, t_j) = D_e(\bar{v}_j, t_j)$.
- Deshalb ist der Schnittpunkt $t_j$ von $D_e(v_j, t)$ und $D_e(\bar{v}_j, t)$ gleichzeitig der Schnittpunkt von $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$.
- Damit ist es in der Folgerung ausreichend, nur den Punkt $t_i$ zu betrachten und $t_j$ zu ignorieren.

$\square$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Der folgende Algorithmus basiert auf der letzten Folgerung und dem letzten Lemma.
- In einer Vorberechnung wird für jeden Knoten $v \in V$ eine Liste $L(v)$ konstruiert, in dem die Knoten des Graphen in monoton fallender Reihenfolge ihrer Distanz zu $v$ stehen.
  Knoten $v$ ist dabei der letzte in seiner Liste $L(v)$.
- Unter der Annahme, dass die Distanzmatrix bekannt ist, dauert die Konstruktion jeder Liste $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritte.
- Gesamtkomplexität für alle Knoten: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Sei $e = (v_r, v_s)$ und sei $v_i$ der $i$-te Knoten in Liste $L(v_r)$.
- Dann gilt

$$D_e(v_1, 0) \geq D_e(v_2, 0) \geq \ldots \geq D_e(v_{n-1}, 0) > D_e(v_n, 0) = 0$$

  In dieser Notation ist $v_r$ (der Endpunkt von $e$) benannt mit $v_n$.

- Der folgende Algorithmus zum Finden eines local centers auf $e$ arbeitet etappenweise, wobei man in der $i$-ten Phase die Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ betrachtet und deren Schnittpunkt berechnet, falls es notwendig ist.
- Man beachte, dass falls für ein $j$ und $k$ $(1 < j \leq k < n)$ gilt, dass

$$D_e(v_{j-1}, 0) > D_e(v_j, 0) = \ldots = D_e(v_k, 0) > D_e(v_{k+1}, 0)$$

  dann gilt aufgrund der Definitionen von $V_i$ und $\bar{v}_i$, dass

$$\bar{v}_j = \bar{v}_{j+1} = \ldots = \bar{v}_k.$$

# Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Falls $v_m$ (mit $j \leq m \leq k$) ein Knoten mit minimalem Index ist, so dass

$$D_e(v_m, \ell(e)) = \max_{j \leq i \leq k} \{D_e(v_i, \ell(e))\}$$

  dann impliziert das letzte Lemma, dass aus der ganzen Knotenmenge $\{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$ nur der Knoten $v_m$ betrachtet werden sollte (genauer gesagt wird der Schnittpunkt $t_m$ von $D_e(v_m, t)$ und $D_e(\bar{v}_m, t)$ als mögliches local center betrachtet).

- Aufgrund der Definitionen von $V_i$ und $\bar{v}_i$ und aufgrund der Reihenfolge in Liste $L(v_r)$ folgt, dass Knoten $\bar{v}_{k+1}$ genau der Knoten ist (von den beiden Knoten $\bar{v}_j$ und $v_m$), für den gilt:

$$D_e(\bar{v}_{k+1}, \ell(e)) = \max \left\{ \begin{array}{c} D_e(\bar{v}_j, \ell(e)), \\ D_e(v_m, \ell(e)) \end{array} \right\}$$