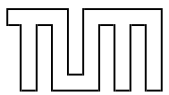
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Sommersemester 2010



Übersicht

Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Topologische Sortierung – warum funktioniert das?

- betrachte einen kürzesten Weg von s nach v
- der ganze Pfad beachtet die topologische Sortierung
- d.h., die Distanzen werden in der Reihenfolge der Knoten vom Anfang des Pfades zum Ende hin betrachtet
- damit ergibt sich für v der richtige Distanzwert

- ein Knoten x kann auch nie einen Wert erhalten, der echt kleiner als seine Distanz zu s ist
- die Kantenfolge von s zu x, die jeweils zu den Distanzwerten an den Knoten geführt hat, wäre dann ein kürzerer Pfad (Widerspruch)

Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Allgemeine Strategie:

- Anfang: setze $d(s) = 0$ und
  für alle anderen Knoten v setze $d(v) = \infty$
- besuche Knoten in einer Reihenfolge, die sicherstellt, dass mindestens ein kürzester Weg von s zu jedem v in der Reihenfolge seiner Knoten besucht wird
- für jeden besuchten Knoten v aktualisiere die Distanzen der Knoten w mit $(v, w) \in E$, d.h. setze

$$d(w) = \min\{\, d(w),\ d(v) + c(v, w) \,\}$$

Kürzeste Wege

Topologische Sortierung

- verwende FIFO-Queue q
- verwalte für jeden Knoten einen Zähler für die noch nicht markierten eingehenden Kanten
- initialisiere q mit allen Knoten, die keine eingehende Kante haben (Quellen)
- nimm nächsten Knoten v aus q und
  markiere alle $(v, w) \in E$, d.h. dekrementiere Zähler für w
- falls der Zähler von w dabei Null wird, füge w in q ein
- wiederhole das, bis q leer wird

Kürzeste Wege

Topologische Sortierung

Korrektheit

- Knoten wird erst dann nummeriert, wenn alle Vorgänger nummeriert sind

Laufzeit

- für die Anfangswerte der Zähler muss der Graph einmal traversiert werden $O(n+m)$
- danach wird jede Kante genau einmal betrachtet

$\Rightarrow$ gesamt: $O(n+m)$

Test auf DAG-Eigenschaft

- topologische Sortierung erfasst genau dann alle Knoten, wenn der Graph ein DAG ist
- bei gerichteten Kreisen erhalten diese Knoten keine Nummer

Kürzeste Wege

DAG-Strategie

1. Topologische Sortierung der Knoten

   Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

2. Aktualisierung der Distanzengemäß der topologischen Sortierung

   Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n+m)$

Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit nicht-negativen Gewichten

Gegeben:

- beliebiger Graph
  (gerichtet oder ungerichtet, muss diesmal kein DAG sein)
- mit nicht-negativen Kantengewichten

$\Rightarrow$ keine Knoten mit Distanz $-\infty$

Problem:

- besuche Knoten eines kürzesten Weges in der richtigen Reihenfolge
- wie bei Breitensuche, jedoch diesmal auch mit Distanzen $\neq 1$

Lösung:

- besuche Knoten in der Reihenfolge der kürzesten Distanz zum Startknoten s

Kürzeste Pfade: SSSP / Dijkstra

Algorithmus 14 : Dijkstra-Algorithmus

Input : $G = (V, E), \quad c : E \to \mathbb{R}, \quad s \in V$
Output : Distanzen $d(s, v)$ zu allen $v \in V$

$P = \emptyset; \quad T = V;$
$d(s, v) = \infty$ for all $v \in V \setminus s;$
$d(s, s) = 0; \quad pred(s) = 0;$
while $P \neq V$ **do**
  $v = \text{argmin}_{v \in T}\{d(s, v)\};$
  $P = P \cup v; \quad T = T \setminus v;$
  forall the $(v, w) \in E$ **do**
    if $d(s, w) > d(s, v) + c(v, w)$ **then**
      $d(s, w) = d(s, v) + c(v, w);$
      $pred(w) = v;$

Algorithmus 15 : Dijkstra-Algorithmus für SSSP

Input : $G = (V, E)$, $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $s \in V$
Output : Distanzen $d[v]$ von s zu allen $v \in V$

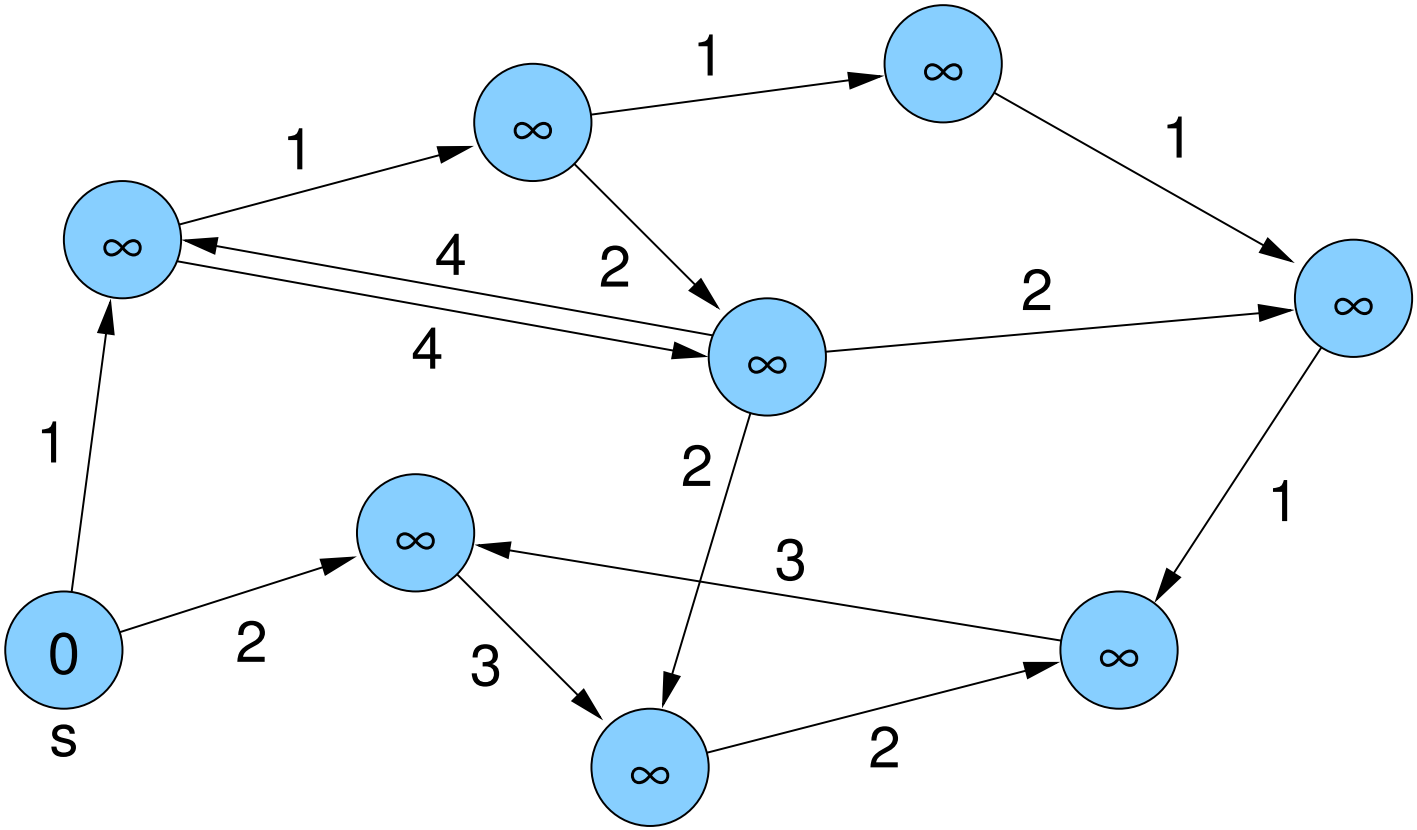
$d[v] = \infty$ for all $v \in V \setminus s$;
$d[s] = 0$; $pred[s] = \perp$;
$pq = \langle\rangle$; pq.insert$(s, 0)$;
while $\neg pq.empty()$ **do**
  $v = pq$.deleteMin();
  forall the $(v, w) \in E$ **do**
    newDist $= d[v] + c(v, w)$;
    if $newDist < d[w]$ **then**
      $pred[w] = v$;
      if $d[w] == \infty$ **then** pq.insert$(w,$ newDist$)$;
      else pq.decreaseKey$(w,$ newDist$)$;
      $d[w =$ newDist;

Dijkstra-Algorithmus

- setze Startwert $d(s,s) = 0$ und zunächst $d(s,v) = \infty$
- verwende Prioritätswarteschlange, um die Knoten zusammen mit ihren aktuellen Distanzen zuspeichern
- am Anfang nur Startknoten (mit Distanz 0) in Priority Queue
- dann immer nächsten Knoten v (mit kleinster Distanz) entnehmen, endgültige Distanz dieses Knotens v steht nun fest
- betrachte alle Nachbarn von v,
  füge sie ggf. in die PQ ein bzw.
  aktualisiere deren Priorität in der PQ

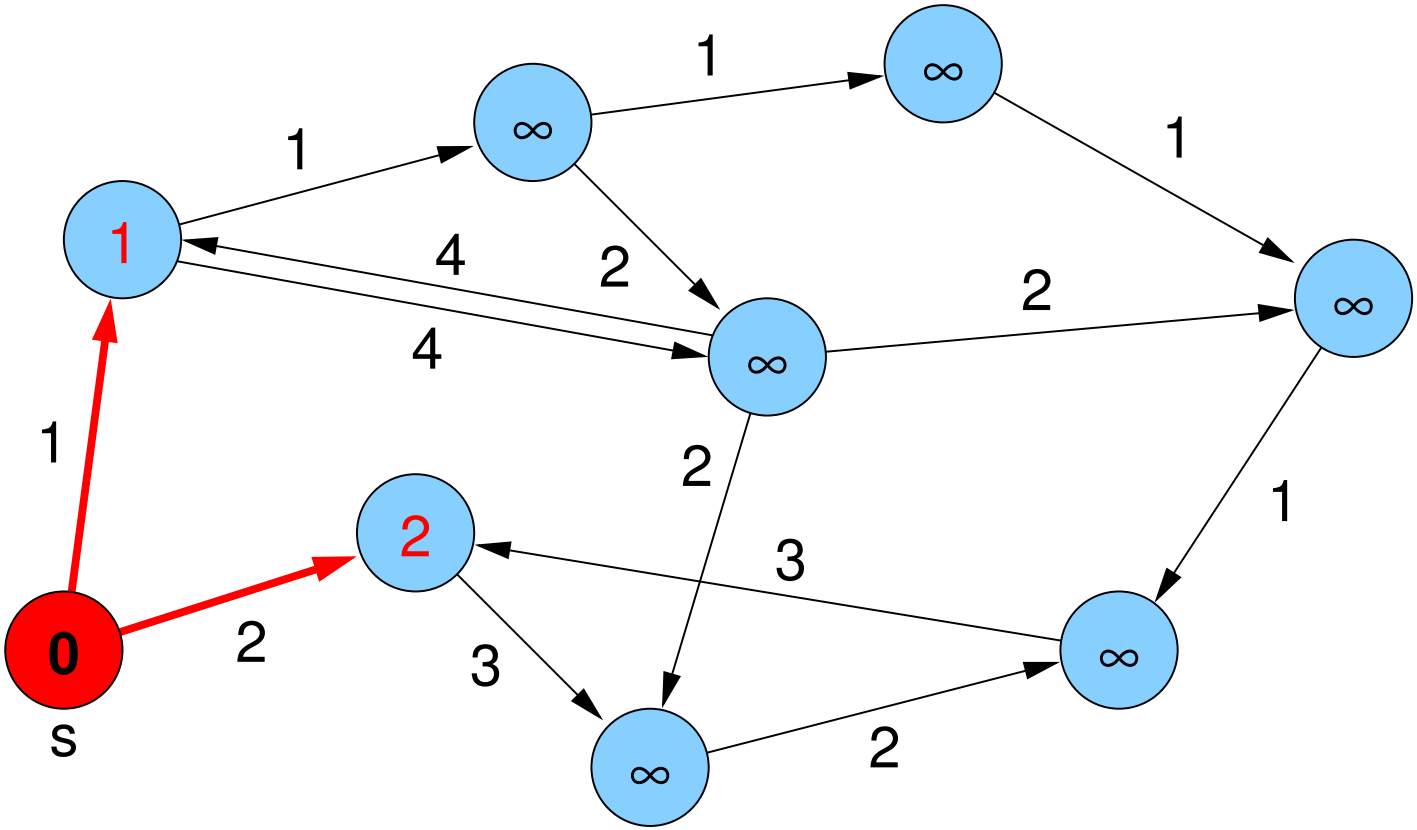
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



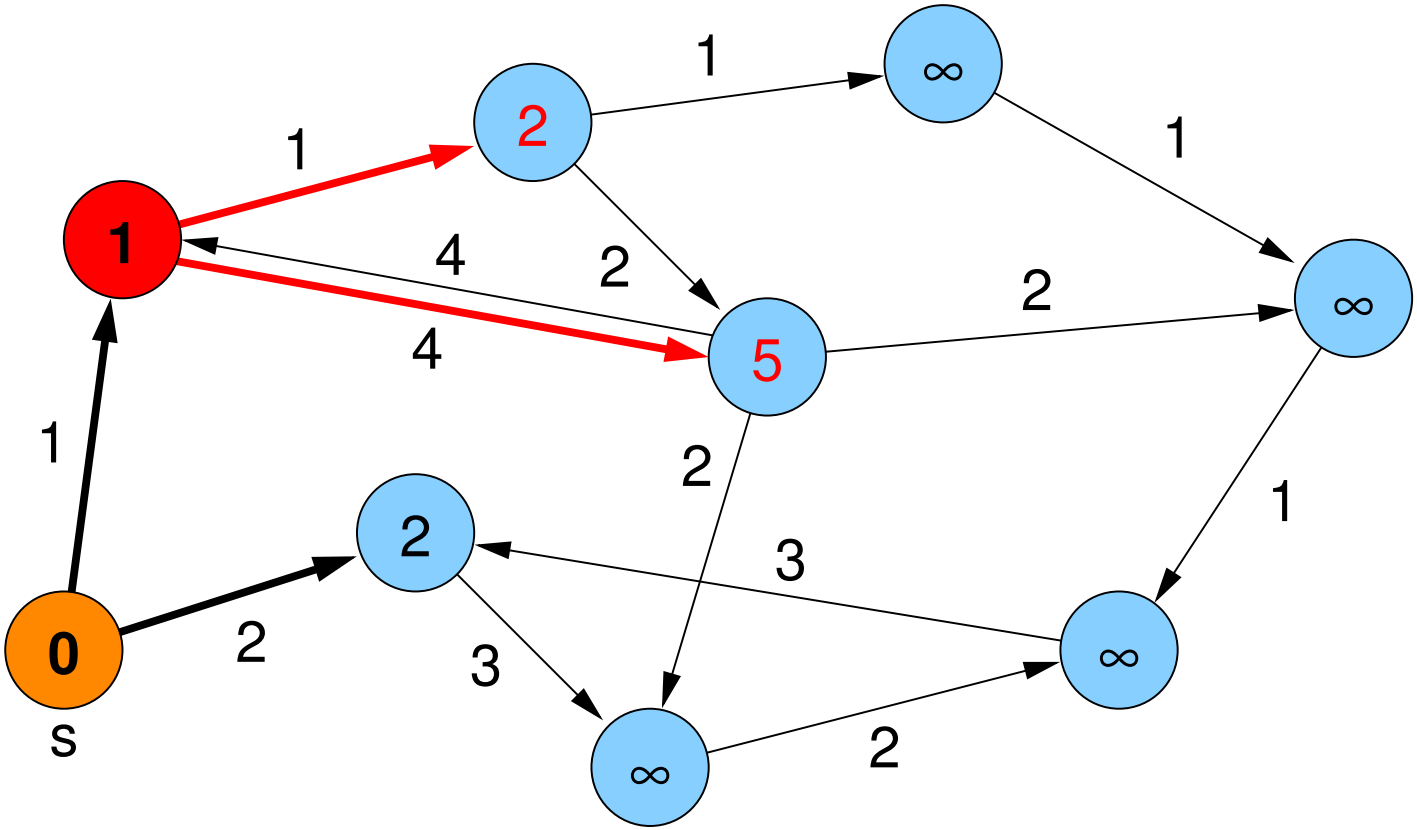
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



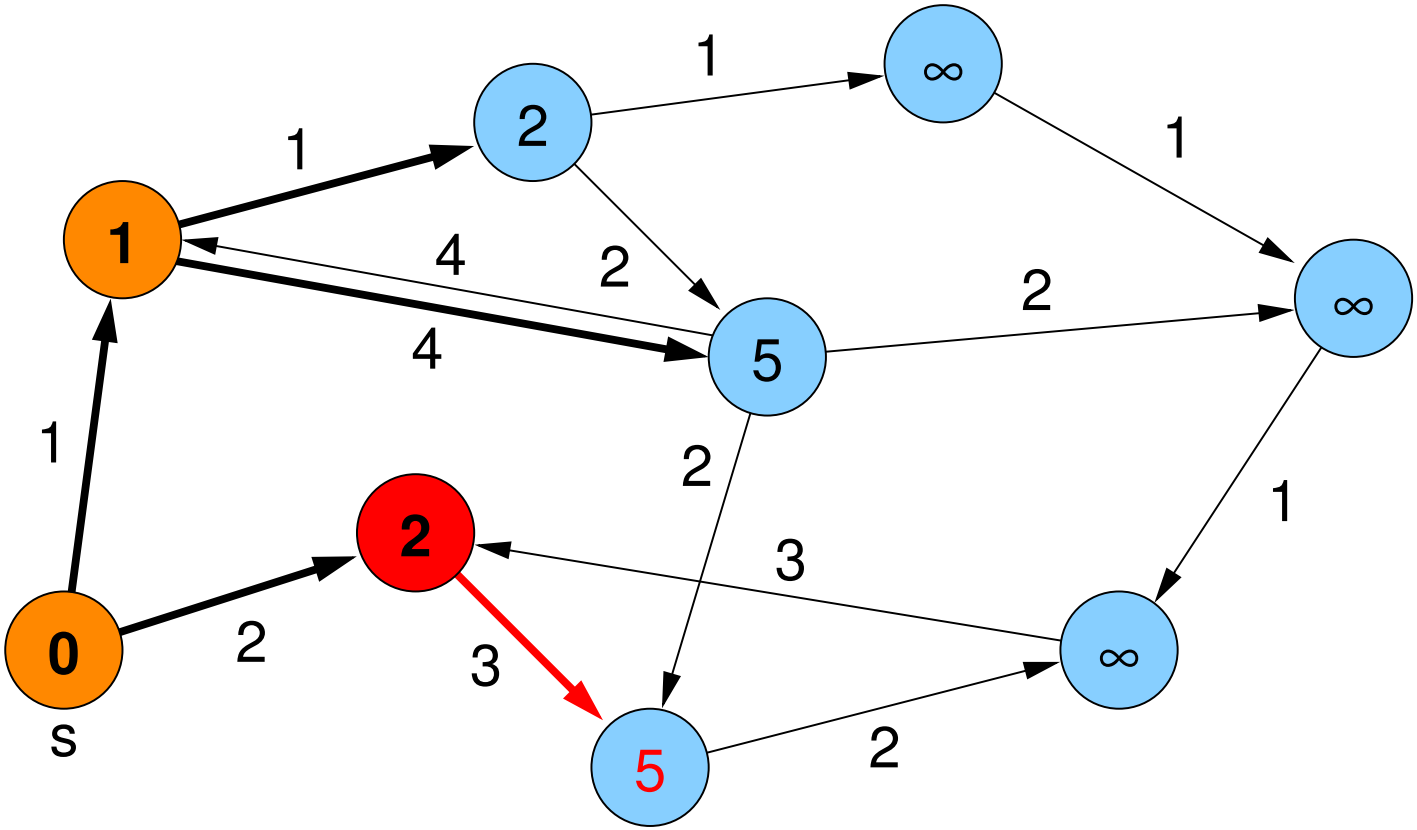
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



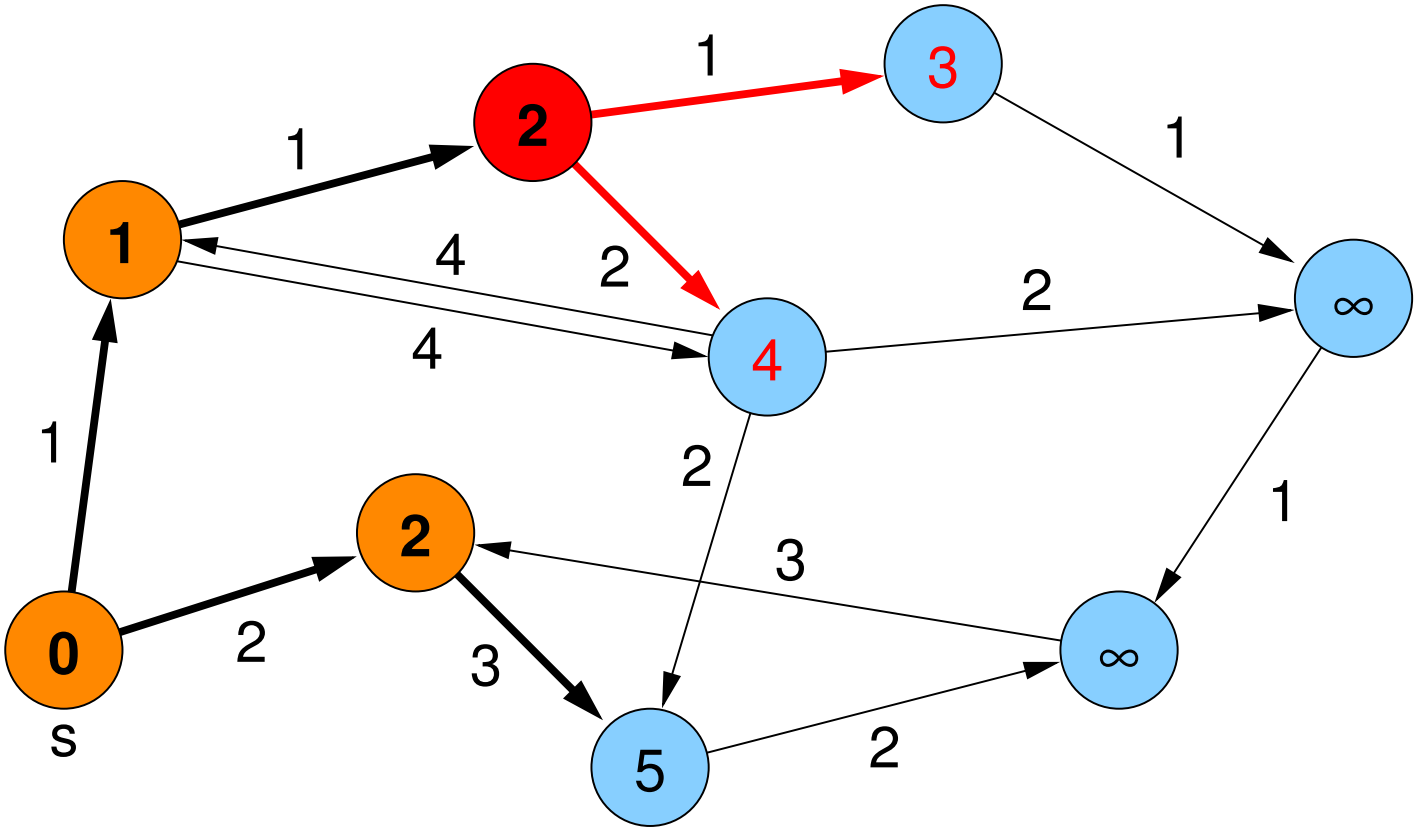
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



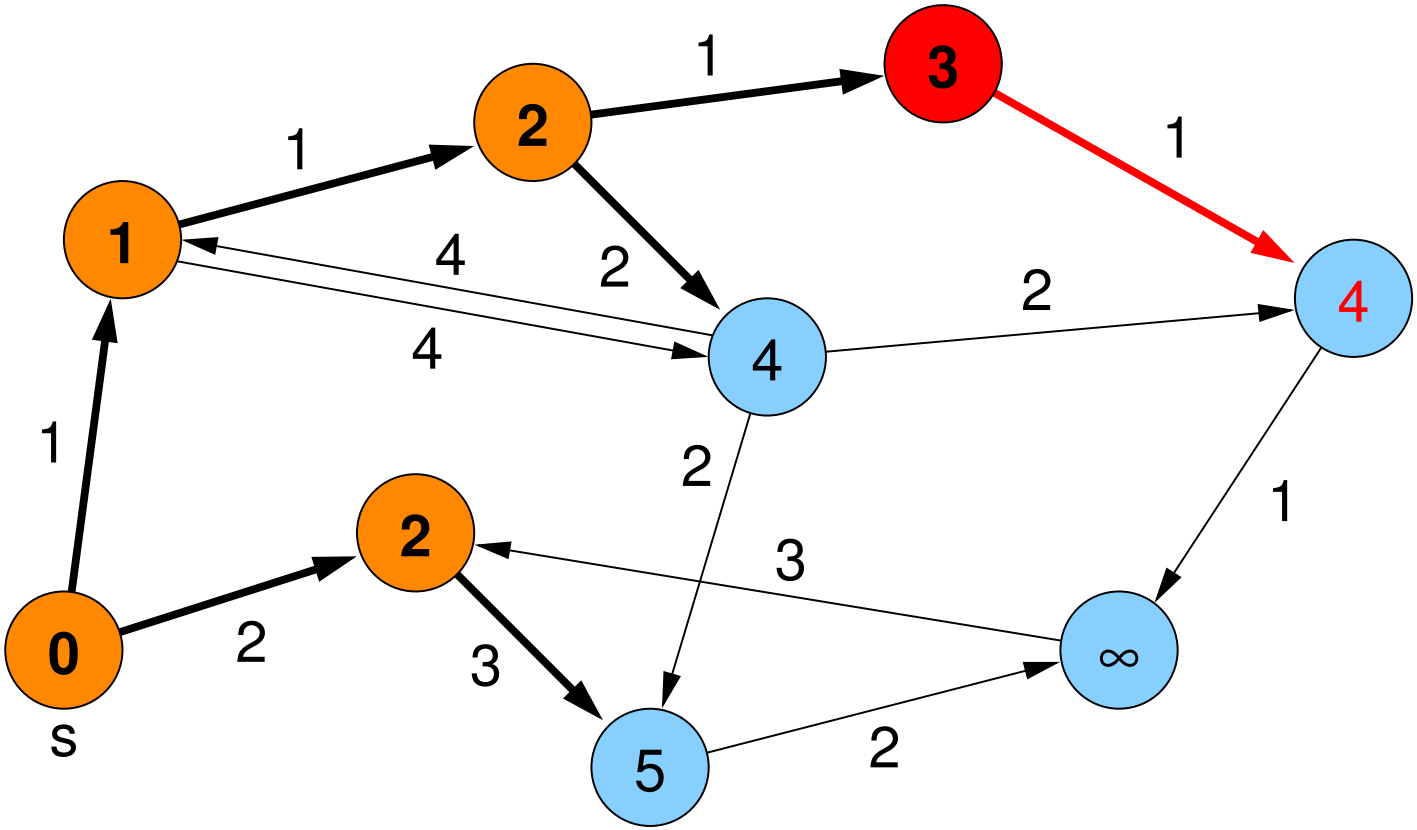
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



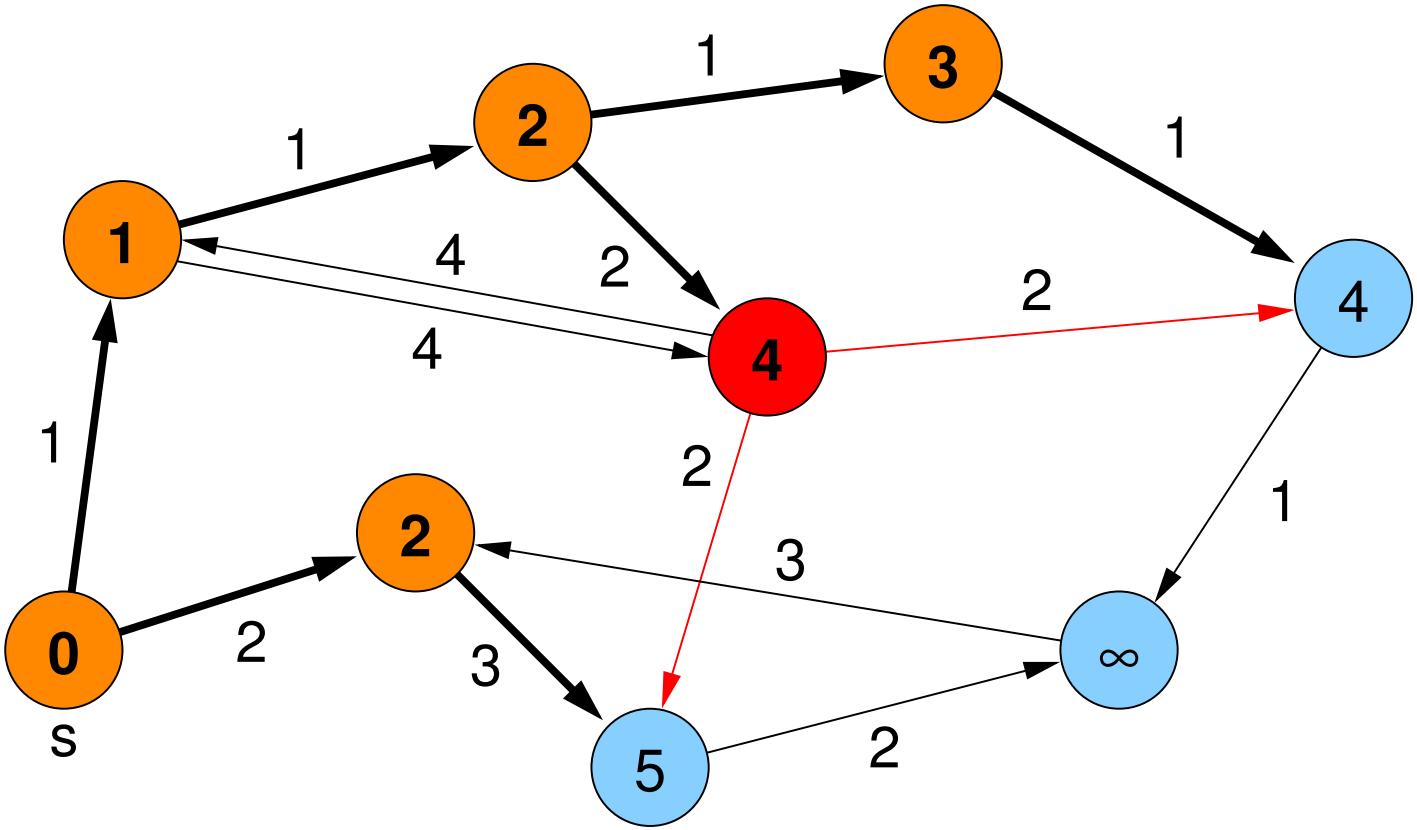
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



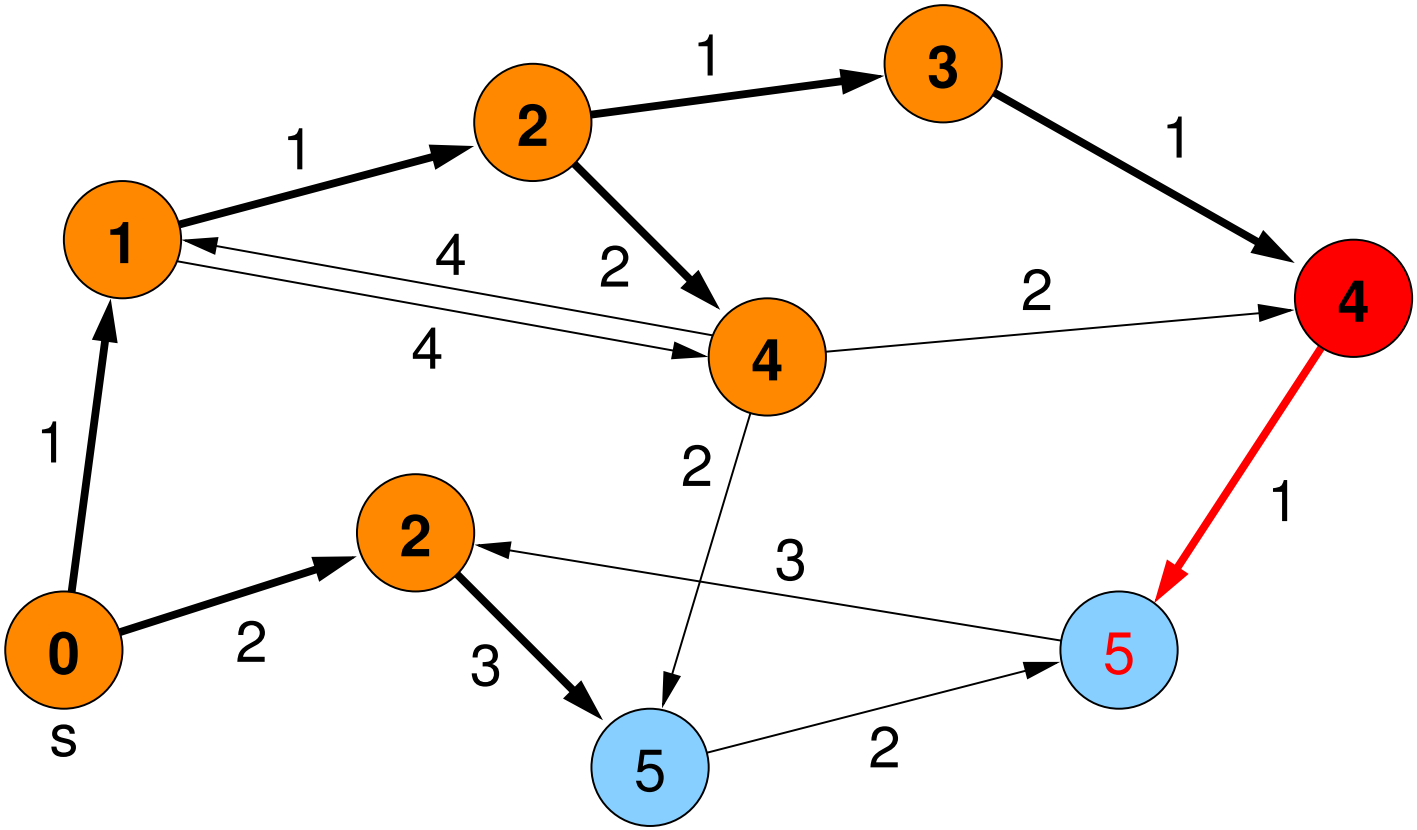
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



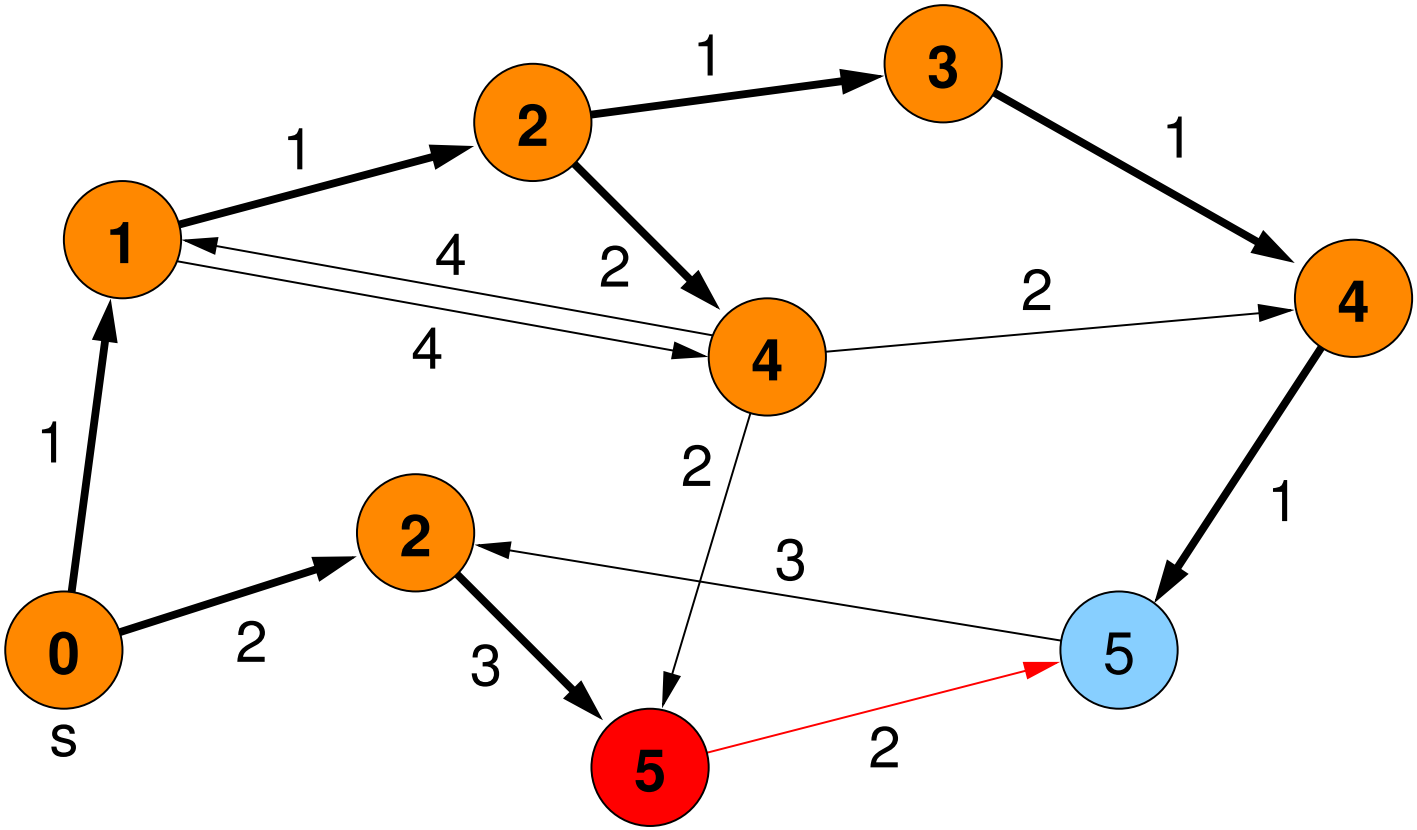
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



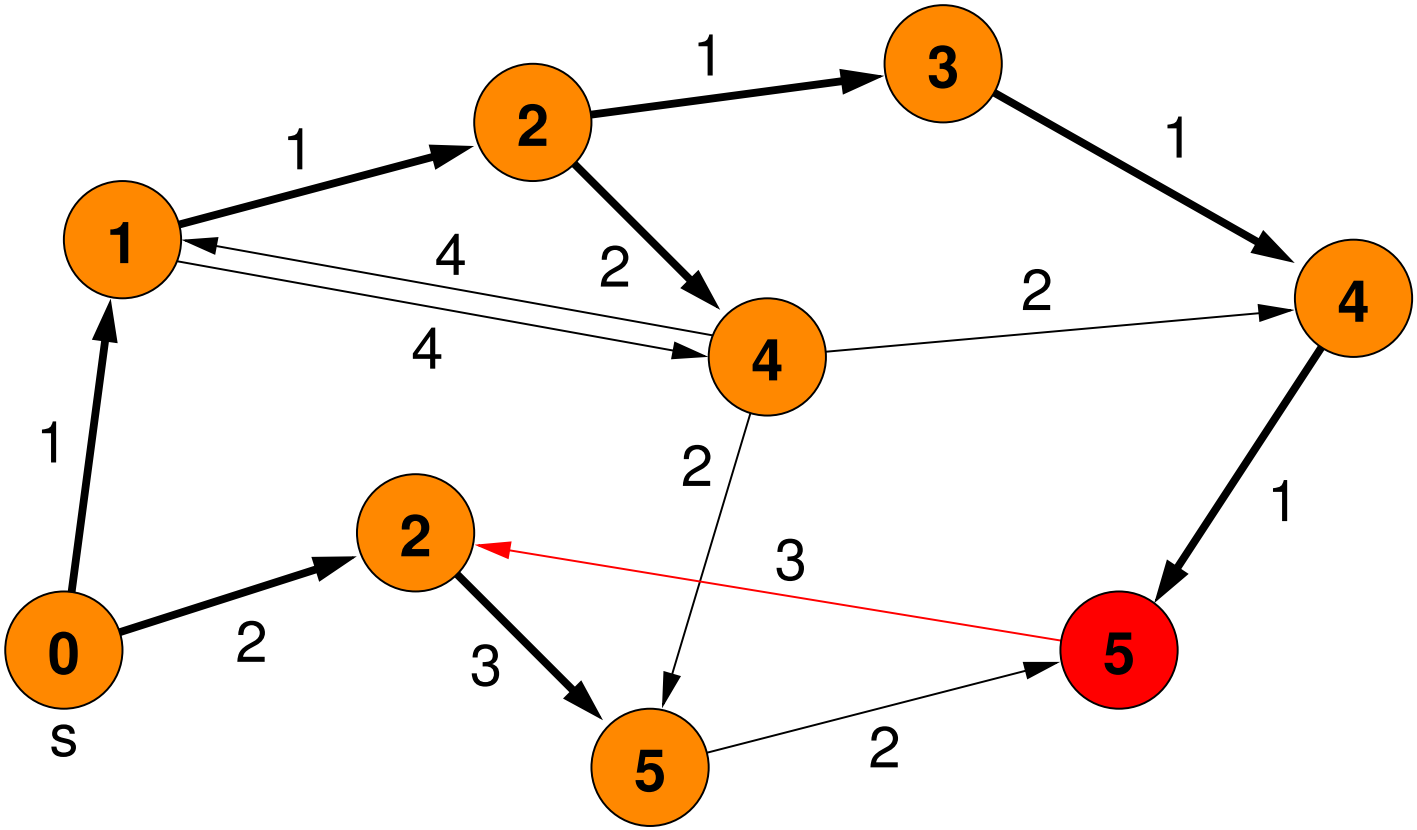
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



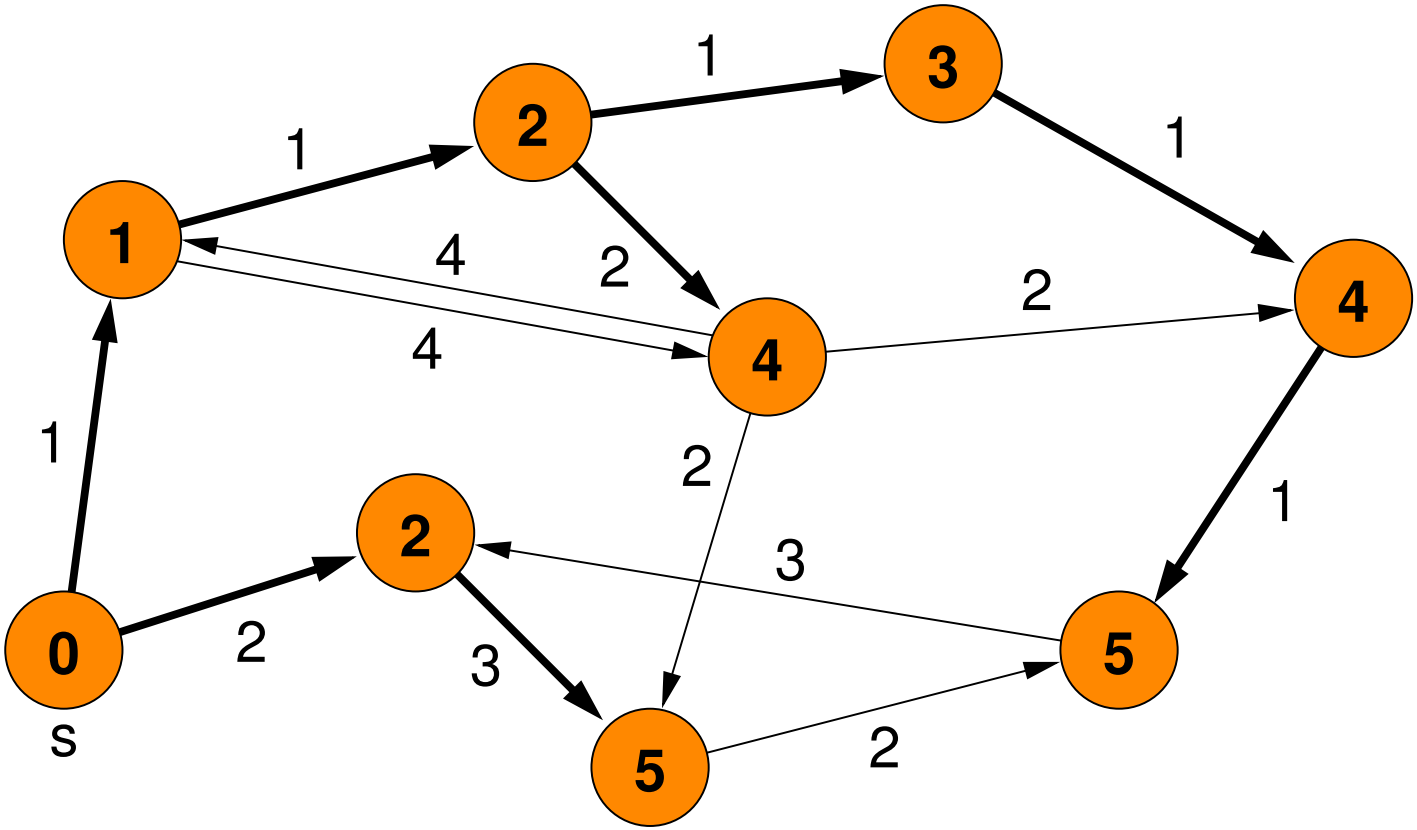
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



Dijkstra-Algorithmus

Korrektheit:

- Annahme: Algorithmus liefert für w einen zu kleinen Wert $d(s, w)$
- sei w der erste Knoten, für den die Distanz falsch festgelegt wird (kann nicht s sein, denn die Distanz $d(s, s)$ bleibt immer 0)
- kann nicht sein, weil $d(s, w)$ nur dann aktualisiert wird, wenn man über einen von s schon erreichten Knoten v mit Distanz $d(s, v)$ den Knoten w über die Kante (v, w) mit Distanz $d(s, v) + c(v, w)$ erreichen kann
- d.h. $d(s, v)$ müsste schon falsch gewesen sein (Widerspruch zur Annahme, dass w der erste Knoten mit falscher Distanz war)

Dijkstra-Algorithmus

- Annahme: Algorithmus liefert für w einen zu großen Wert $d(s, w)$
- sei w der Knoten mit der kleinsten (wirklichen) Distanz, für den der Wert $d(s, w)$ falsch festgelegt wird (wenn es davon mehrere gibt, der Knoten, für den die Distanz zuletzt festgelegt wird)
- kann nicht sein, weil $d(s, w)$ immer aktualisiert wird, wenn man über einen von s schon erreichten Knoten v mit Distanz $d(s, v)$ den Knoten w über die Kante (v, w) mit Distanz $d(s, v) + c(v, w)$ erreichen kann (dabei steht $d(s, v)$ immer schon fest, so dass auch die Länge eines kürzesten Wegs über v zu w richtig berechnet wird)
- d.h. entweder wurde auch der Wert von v zu klein berechnet (Widerspruch zur Def. von w) oder die Distanz von v wurde noch nicht festgesetzt
- weil die berechneten Distanzwerte monoton wachsen, kann letzteres nur passieren, wenn v die gleiche Distanz hat wie w (auch Widerspruch zur Def. von w)

Dijkstra-Algorithmus

- Datenstruktur: Prioritätswarteschlange
  (z.B. Fibonacci Heap: amortisierte Komplexität $\mathcal{O}(1)$ für `insert` und `decreaseKey`, $\mathcal{O}(\log n)$ `deleteMin`)

- Komplexität:
  - $\mathcal{O}(n)$ `insert`
  - $\mathcal{O}(n)$ `deleteMin`
  - $\mathcal{O}(m)$ `decreaseKey`

  $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(m + n \log n)$

- aber: nur für nichtnegative Kantengewichte(!)

Monotone Priority Queues

Beobachtung:

- aktuelles Distanz-Minimum der verbleibenden Knoten ist beim Dijkstra-Algorithmus monoton wachsend

Monotone Priority Queue

- Folge der entnommenen Elemente hat monoton steigende Werte
- effizientere Implementierung möglich, falls Kantengewichte ganzzahlig

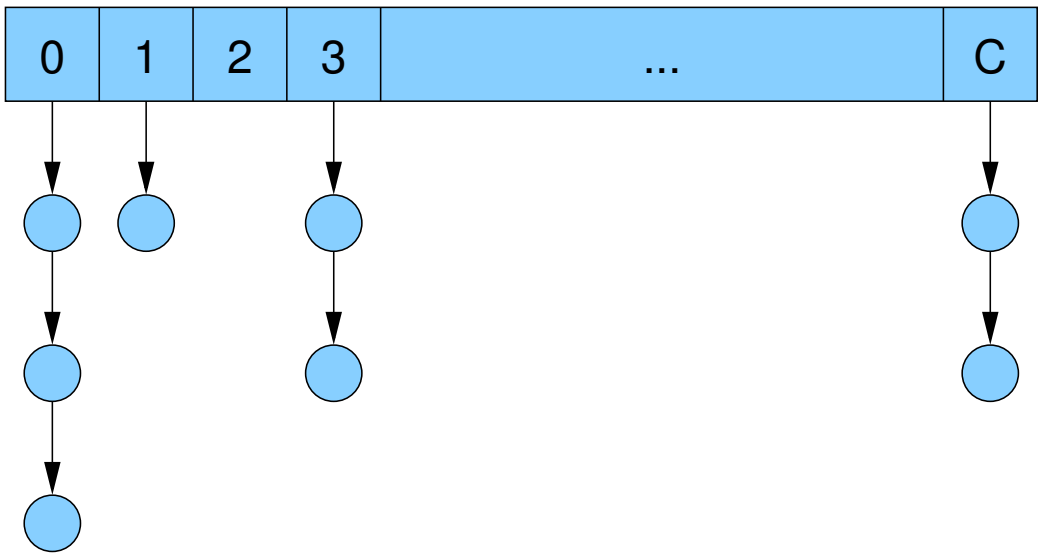
Annahme: alle Kantengewichte im Bereich $[0, C]$

Konsequenz für Dijkstra-Algorithmus:

$\Rightarrow$ enthaltene Distanzwerte immer im Bereich $[d, d + C]$

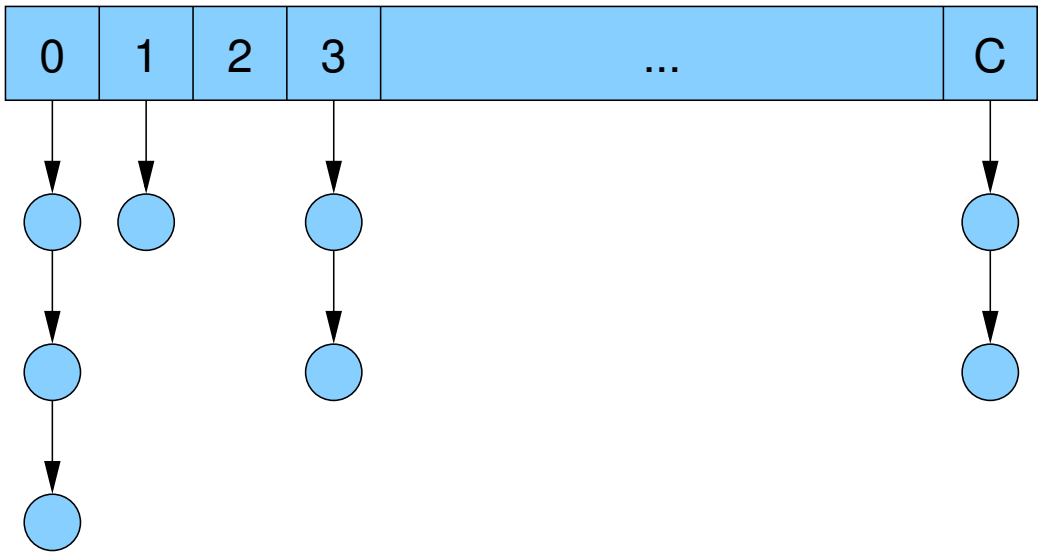
Bucket Queue

- Array B aus $C + 1$ Listen
- Variable d_{min} für aktuelles Distanzminimum mod$(C + 1)$



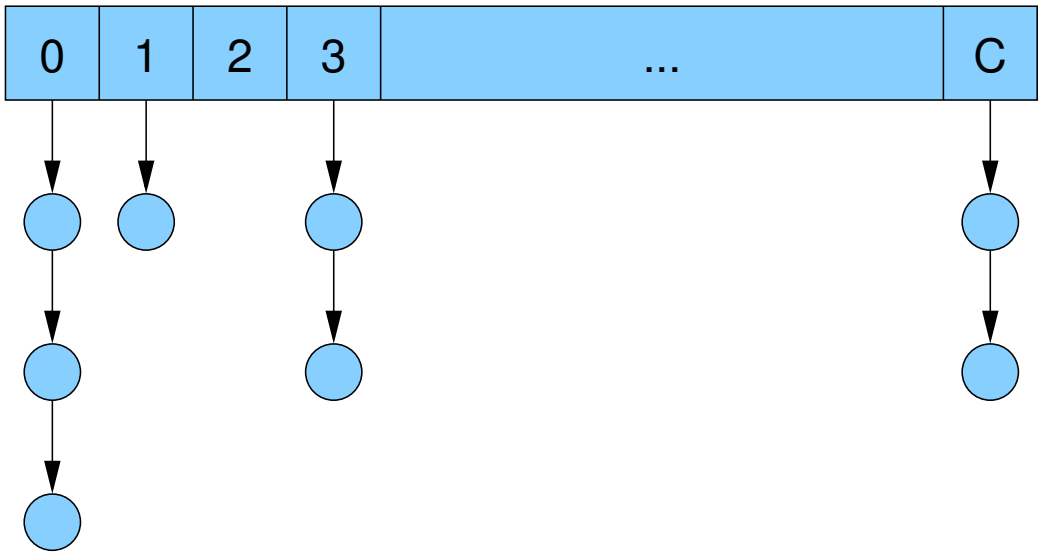
Bucket Queue

- jeder Knoten v mit aktueller Distanz $d[v]$ in Liste $B[d[v] \bmod (C+1)]$
- alle Knoten in Liste $B[d]$ haben dieselbe Distanz, weil alle aktuellen Distanzen im Bereich $[d, d+C]$ liegen



Bucket Queue / Operationen

- insert(v): fügt v in Liste $B[d[v] \bmod (C+1)]$ ein ($\mathcal{O}(1)$)
- decreaseKey(v): entfernt v aus momentaner Liste ($\mathcal{O}(1)$ falls Handle auf Listenelement in v gespeichert) und fügt v in Liste $B[d[v] \bmod (C+1)]$ ein ($\mathcal{O}(1)$)
- deleteMin(): solange $B[d_{\min}] = \emptyset$, setze $d_{\min} = (d_{\min}+1) \bmod (C+1)$.
  Nimm dann einen Knoten u aus $B[d_{\min}]$ heraus ($\mathcal{O}(C)$)



Dijkstra mit Bucket Queue

- insert, decreaseKey: $\mathcal{O}(1)$
- deleteMin: $\mathcal{O}(C)$
- Dijkstra: $\mathcal{O}(m + C \cdot n)$

- lässt sich mit Radix Heaps noch verbessern
- verwendet exponentiell wachsende Bucket-Größen
- Details in der Vorlesung Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
- Laufzeit ist dann $\mathcal{O}(m + n \log C)$

Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegeben:

- beliebiger Graph mit beliebigen Kantengewichten

$\Rightarrow$ Anhängen einer Kante an einen Weg kann zur Verkürzung des Weges (Kantengewichtssumme) führen (wenn Kante negatives Gewicht hat)

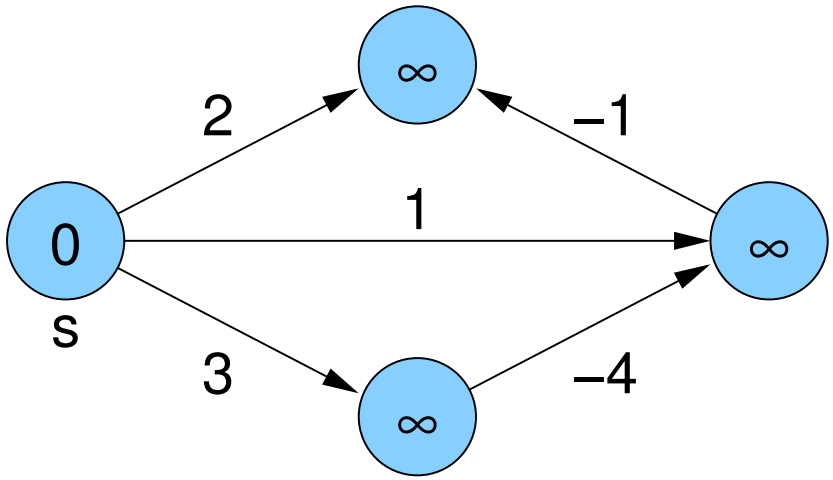
$\Rightarrow$ es kann negative Kreise und Knoten mit Distanz $-\infty$ geben

Problem:

- besuche Knoten eines kürzesten Weges in der richtigen Reihenfolge
- Dijkstra kann nicht mehr verwendet werden, weil Knoten nicht unbedingt in der Reihenfolge der kürzesten Distanz zum Startknoten s besucht werden

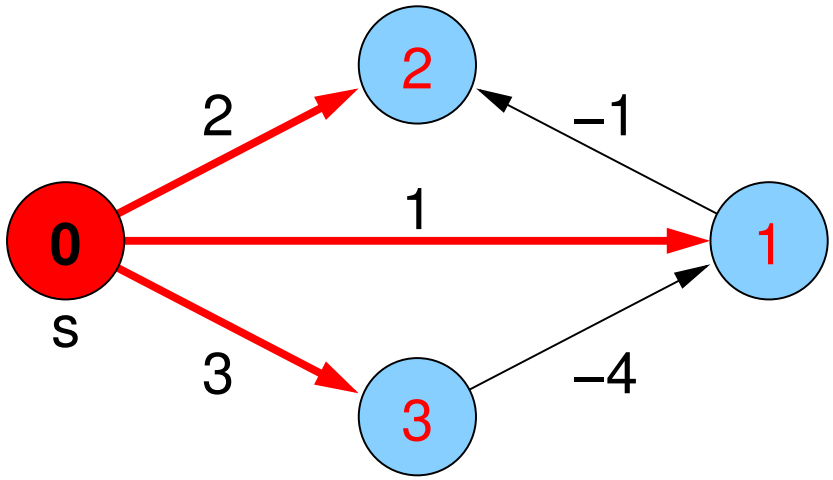
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



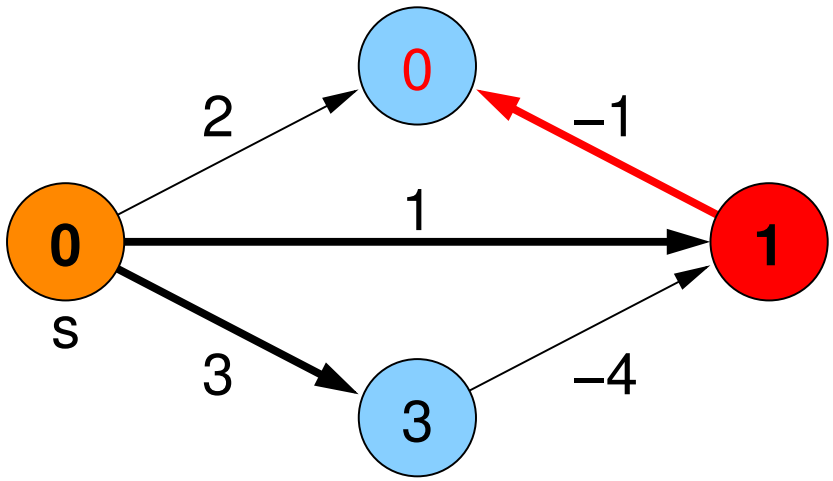
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



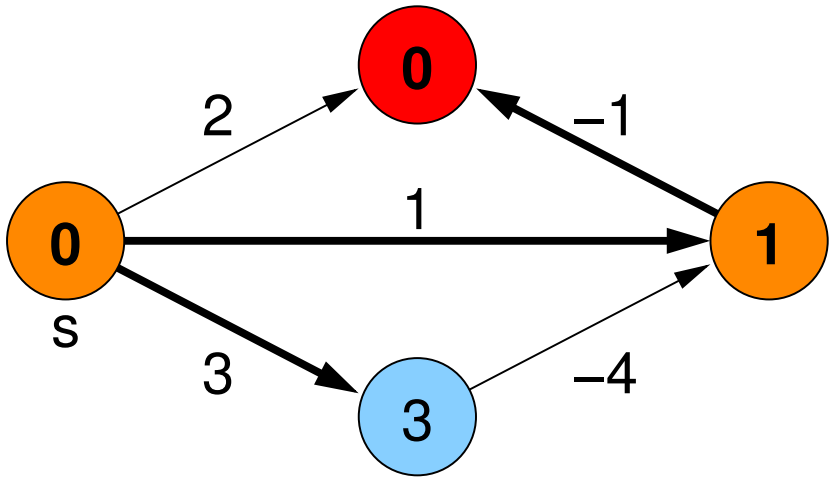
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



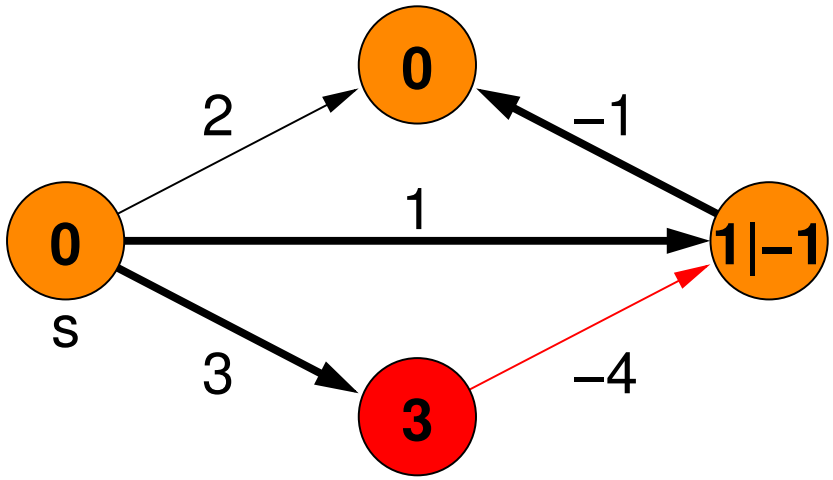
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



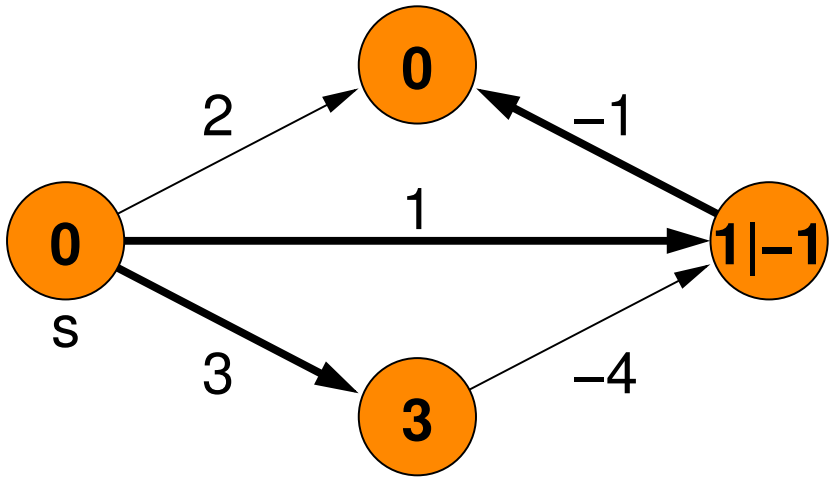
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



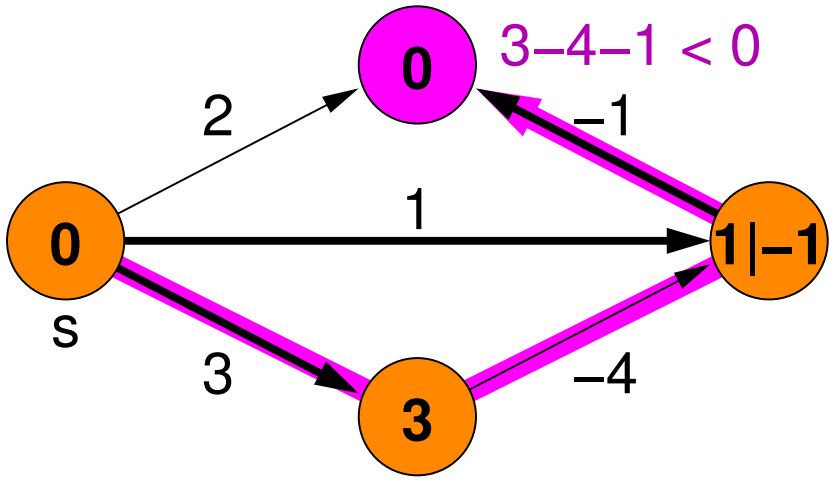
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Lemma

Für jeden Knoten v mit $d(s,v) > -\infty$ gibt es einen einfachen Pfad (ohne Kreis) von s nach v der Länge $d(s,v)$.

Beweis.

- Weg mit Kreis mit Kantengewichtssumme ≥ 0:
  Entfernen des Kreises erhöht nicht die Kosten
- Weg mit Kreis mit Kantengewichtssumme < 0:
  Distanz von s ist $-\infty$

□

Bellman-Ford-Algorithmus

Folgerung

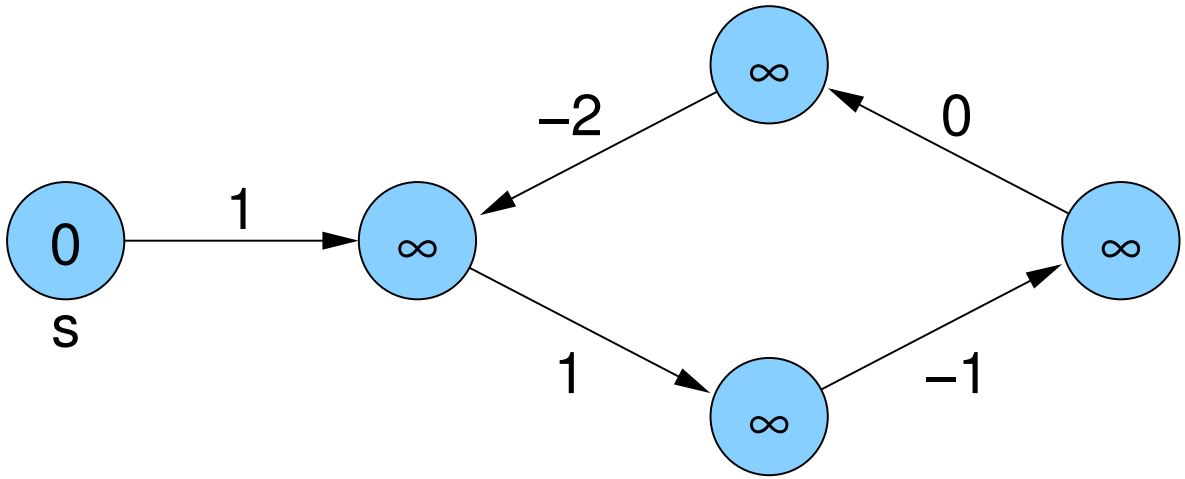
In einem Graph mit n Knoten gibt es für jeden erreichbaren Knoten v mit $d(s,v) > -\infty$ einen kürzesten Weg bestehend aus $< n$ Kanten zwischen s und v.

Strategie:

- anstatt kürzeste Pfade in Reihenfolge wachsender Gewichtssumme zu berechnen, betrachte sie in Reihenfolge steigender Kantenanzahl
- durchlaufe (n-1)-mal alle Kanten im Graph und aktualisiere die Distanz
- dann alle kürzesten Wege berücksichtigt

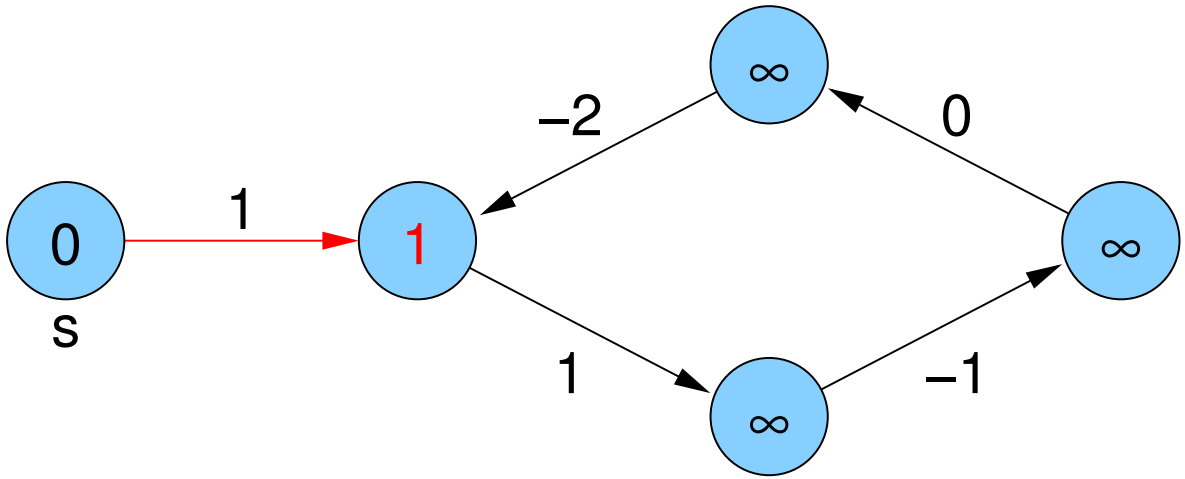
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



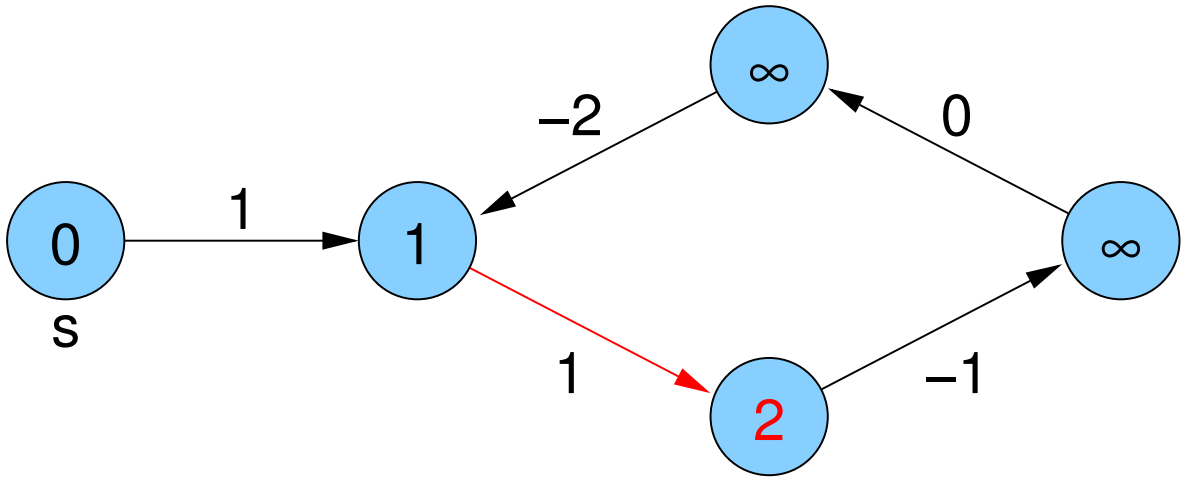
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



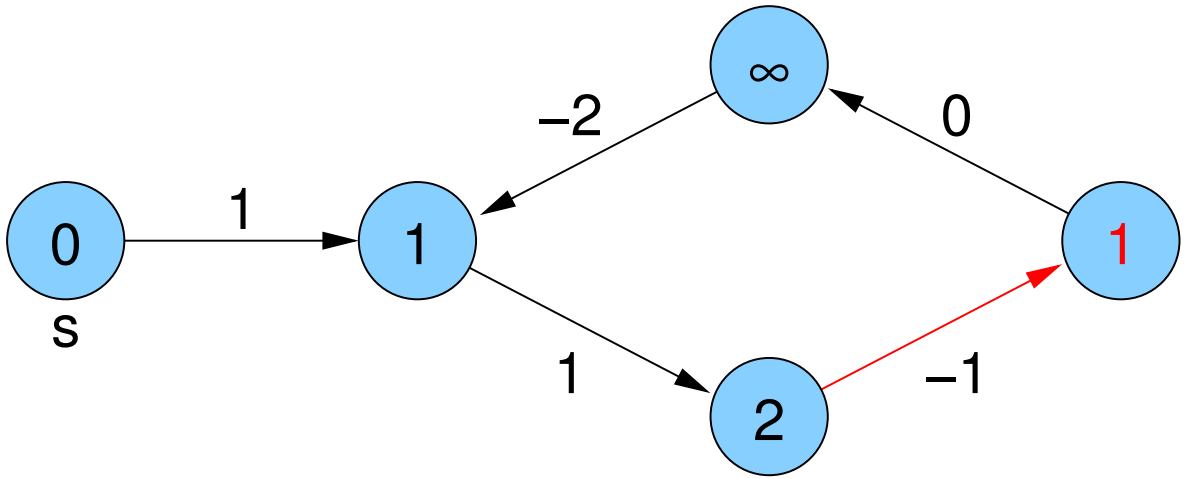
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



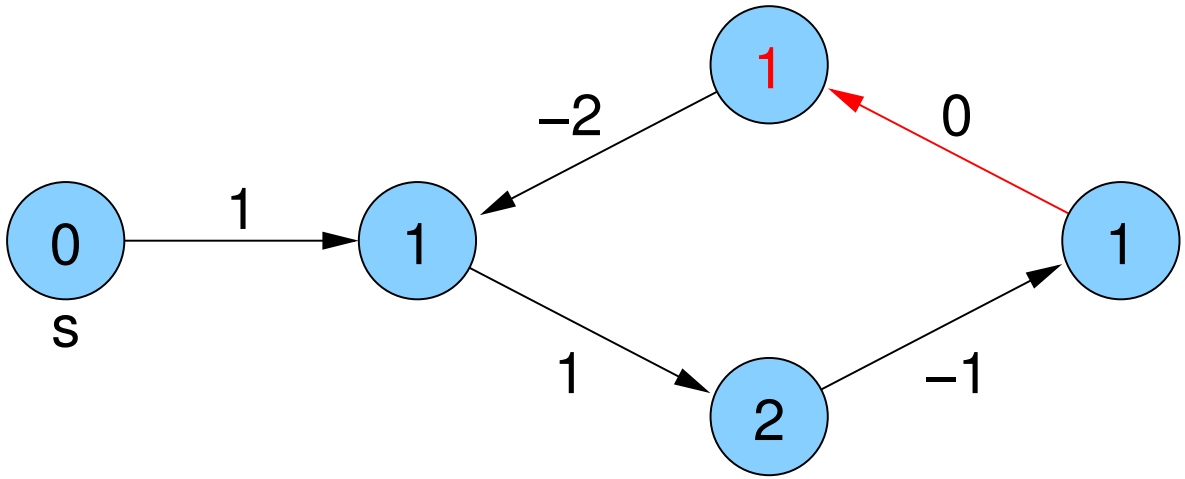
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



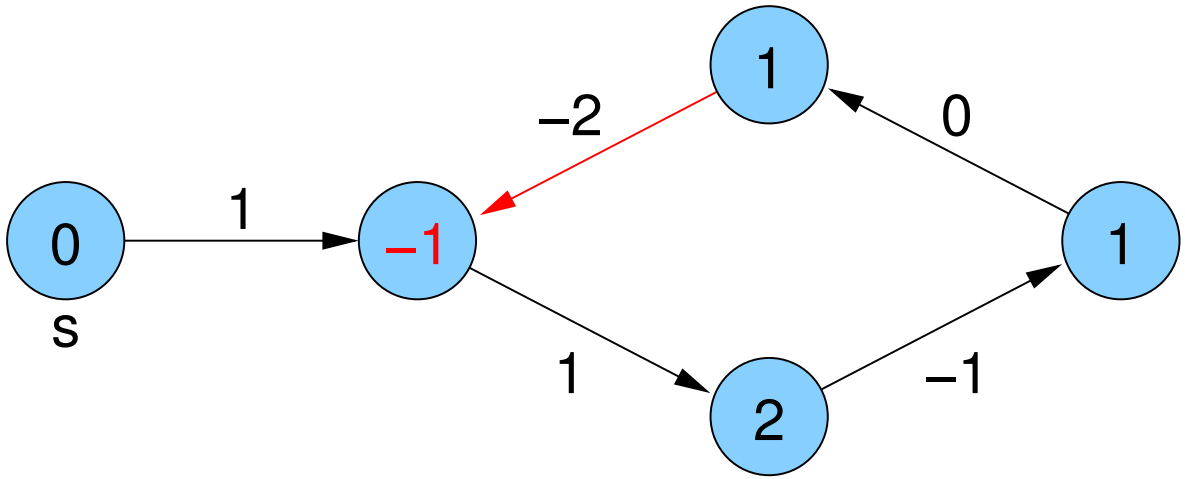
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



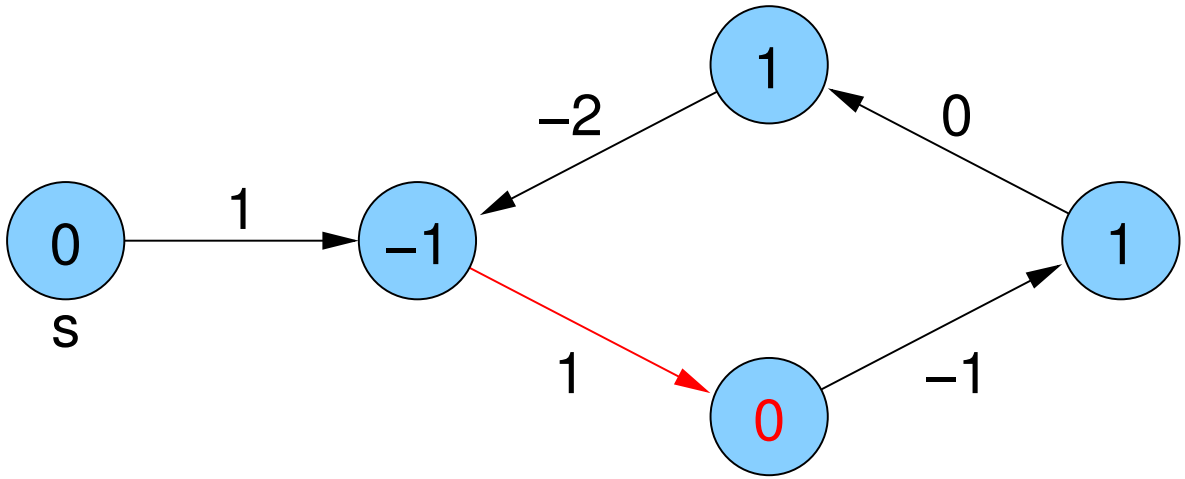
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



Bellman-Ford-Algorithmus

Keine Distanzerniedrigung möglich:

- Annahme: zu einem Zeitpunkt gilt für alle Kanten (v, w) $d[v] + c(v, w) \geq d[w]$
- dann gilt (per Induktion) für jeden Weg p von s nach w, dass $d[s] + c(p) \geq d[w]$ für alle Knoten w
- falls sichergestellt, dass zu jedem Zeitpunkt für kürzesten Weg p von s nach w gilt $d[w] \geq c(p)$, dann ist $d[w]$ zum Schluss genau die Länge eines kürzesten Pfades von s nach w (also korrekte Distanz)

Bellman-Ford-Algorithmus

Zusammenfassung:

- keine Distanzerniedrigung mehr möglich
  ($d[v] + c(v,w) \geq d[w]$ für alle w):
  fertig, alle $d[w]$ korrekt für alle w

- Distanzerniedrigung möglich selbst noch in n-ter Runde
  ($d[v] + c(v,w) < d[w]$ für ein w):
  Es gibt einen negativen Kreis, also Knoten w mit Distanz $-\infty$.