Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2009/10

Übersicht

Zusammenhangsvielfalt

Definition

Für einen Graphen G sei die **Zusammenhangs(komponenten)vielfalt** $\eta(G)$ definiert als

$$\eta(G) = |\{H : H \text{ ist eine } k\text{-Komponente von } G \text{ für ein } k \geq 1\}|$$

- Aus dem vorangegangenen Korollar folgt $\eta(G) \leq |V(G)| + |E(G)|$.
- Noch genauer (isolierte Knoten sind keine k-Komponenten):

Satz

Für jeden Graph G gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Für den Beweis wird eine stärkere Ungleichung für zusammenhängende Graphen gezeigt:

$$\eta(G) \le \left\lfloor \frac{|V(G)| + 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

- klar für zusammenhängende Graphen auf 1 oder 2 Knoten
- Induktion: angenommen G ist ein zusammenhängender Graph auf $n \ge 3$ Knoten und die Ungleichung gilt für zusammenhängende Graphen auf weniger als n Knoten.
- Falls $\lambda(G) = \sigma(G)$, dann gilt $\eta(G) = 1$ und somit auch die Ungleichung.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Sonst sei G' der Teilgraph von G, den man aus G durch Löschen der Elemente mit Kohäsion $\lambda(G)$ erhält, d.h. G' ist ein Graph, dessen Komponenten die $(\lambda(G)+1)$-Komponenten von G sind.
- Die Kanten von G mit Kohäsion $\lambda(G)$ müssen einen Cut von G beinhalten.

$\Rightarrow$ G' ist nicht zusammenhängend oder hat weniger Knoten als G.

- In beiden Fällen hat jede der Komponenten $G'_1, G'_2, \ldots, G'_j$ von G' weniger Knoten als G.

$\Rightarrow$ Ungleichung lässt sich per Induktionsvoraussetzung auf alle G'_i mit $i \in \{1, \ldots, j\}$ anwenden.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Ebenso gilt $\lambda(G_i') \geq \lambda(G) + 1$ für $i \in \{1, \ldots, j\}$.
- Eine k-Komponente von G' muss nun eine k-Komponente einer Komponente von G' sein und umgekehrt.
- Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \eta(G') = \sum_{i=1}^{j} \eta(G_i') &\leq \sum_{i=1}^{j} \left\lfloor \frac{|V(G_i')| + 1 - \lambda(G_i')}{2} \right\rfloor \\ &\leq \left\lfloor \frac{|V(G')| - j\lambda(G)}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

- Es gilt $|V(G')| \leq |V(G)| - 1$ oder G' ist nicht zusammenhängend, so dass $j \geq 2$ und $j\lambda(G) \geq \lambda(G) + 1$.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- In jedem Fall gilt:

$$\eta(G') \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| - 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

- G selbst ist eine k-Komponente von G für $k = \lambda(G)$, und $\eta(G) = \eta(G') + 1$.
- Damit gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| + 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

Ungleichung aus dem Satz:

- Die Ungleichung aus dem Satz ist für triviale Graphen klar.
- Für nichttriviale *zusammenhängende* Graphen folgt sie aus der verschärften Form.
- Für beliebige Graphen folgt sie aus der Summation über die *nichttrivialen* Komponenten.

$\square$

Cluster und Subcluster

- Die Zusammenhangsfunktion eines Graphen G hat ein Plateau über jeder $\sigma(G)$-Komponente und evt. auch noch an anderen Stellen.
- Diese Plateaus markieren bestimmte Gebiete von (lokal) optimalem Zusammenhang. Es sind k-Komponenten, die völlig disjunkt zu $(k+1)$-Komponenten sind.

Definition

Jeder isolierte Knoten und für $k \geq 1$ jede k-Komponente von G, die keine $(k+1)$-Komponente enthält, ist ein Cluster von G.
Der Graph G ist ein Cluster, falls $\sigma(G) = \lambda(G)$.

Cluster und Subcluster

- Es ist klar, dass verschiedene Cluster keine gemeinsamen Knoten enthalten können (folgt aus Disjunktheit von k-Komponenten).
- Die Cluster von G lassen sich aus der Zusammenhangsfunktion bestimmen.

Definition

Ein induzierter Teilgraph $K[A]$ eines Clusters K des Graphen G mit $\lambda(K[A]) = \lambda(K)$ heißt Subcluster von G.

Subcluster repräsentieren also induzierte Teilgraphen von lokal maximalem Kantenzusammenhang, die nicht unbedingt inklusions-maximal sind.

Cluster und Subcluster

- Wenn $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster von G sind, für die gilt $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ ein Subcluster von G.
- Die Subcluster eines Graphen bilden unter der Relation "ist echter Teilgraph von" eine partielle Ordnung mit Clustern als maximalen Elementen.
- Die partielle Ordnung der Subcluster in einem bestimmten Cluster ist ein beschränkter Verband.
- Da alle Cluster eines Graphen disjunkt sind, ist die vollständige partielle Ordnung eine Vereinigung von disjunkten beschränkten Verbänden.

Schnitt von Subclustern

Satz

Seien $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster eines Clusters K in G, so dass $A \cap B \neq \emptyset$.

Wenn es einen MinCut von $G[A] \cup G[B]$ gibt, der

- *die Knoten in $A - B$ von den Knoten in $B - A$ separiert und*
- *der mindestens eine Kante aus $G[A \cap B]$ enthält,*

dann ist $G[A \cap B]$ ein Subcluster von K in G.

Beweis.

siehe D. Matula: k-Components, clusters, and slicings in graphs SIAM J. Appl. Math. 22(3):459–480, 1972. $\square$

Slicings

Definition

Die geordnete Partition der Kanten des Graphen G, $Z = (C_1, C_2, \dots, C_m)$, ist ein Slicing von G falls für jedes Element C_i gilt:

$$C_i \text{ ist ein Cut } (A_i, \bar{A}_i) \text{ von } \begin{cases} G & \text{für } i = 1 \\ G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j & \text{für } i \in \{2, \dots, m\} \end{cases}$$

Ein Element C_i des Slicings heißt auch Cut des Slicings.

Anmerkung: m ist hier nicht die Kantenanzahl.

Minimale und Narrow Slicings

Definition

Ein Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ von G, für das es keine echte Unterpartition gibt, die ein Slicing von G ist, ist ein minimales Slicing von G.

- Jeder Cut C_i eines minimalen Slicings muss ein minimaler Cut einer Komponente von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ sein.

Definition

Z ist ein Narrow Slicing von G, falls jeder Cut C_i ein Minimum Cut einer Komponente von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ ist.

Minimale und Narrow Slicings

Dynamische Interpretation:

- Slicing ist Sequenz von nicht-leeren Cuts, die G in isolierte Knoten teilen
- Minimale / Narrow Slicings verwenden nur Minimale / Minimum Cuts in jedem Schritt.
- Jedes Narrow Slicing ist auch ein Minimales Slicing (was umgekehrt nicht gilt).

Slicings

- nützlich: Slicing als sukzessive Zerlegung der Knotenmenge
- i-ter Cut $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ ist Cut von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$
- Da $A_i \cup \bar{A}_i = V(G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j) = V(G)$, betrifft $(A_i, \bar{A}_i)_i$ die gleiche Partition der Knoten von G wie der Cut $(A_i, \bar{A}_i)$ von G.
- Es gilt
$$(A_i, \bar{A}_i)_i = (A_i, \bar{A}_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$$
- Also enthält $(A_i, \bar{A}_i)_i$ nicht unbedingt alle Kanten des Cuts $(A_i, \bar{A}_i)$ von G für $i > 1$.
- Beachte: Kantenmenge $(A_i, \bar{A}_i)$ hängt implizit von G ab,
Kantenmenge $(A_i, \bar{A}_i)_i$ hängt implizit von G und Z ab.
Die Knotenpartition ist jedoch explizit und bei beiden gleich!

Knotenpartitionen

- Repräsentation der Cuts des Slicings als Knotenpartition von $V(G)$ bietet eine nützliche Charakterisierung von jedem Graphen $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ als Vereinigung von induzierten Teilgraphen von G
- Da C_1 die Knotenmenge A_1 von $\bar{A}_1$ separiert, und damit $G - C_1 = G[A_1] \cup G[\bar{A}_1]$, gilt somit:

  $$G-(C_1 \cup C_2) = G[A_1 \cap A_2] \cup G[A_1 \cap \bar{A}_2] \cup G[\bar{A}_1 \cap A_2] \cup G[\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2]$$

Satz

Induktiv folgt: Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G mit $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt für $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k = \bigcup \left\{ G\left[\bigcap_{i \in s} A_i \cap \bigcap_{i \notin s} \bar{A}_i \right] : s \subset \{1, 2, \ldots, j\} \right\}$$

Knotenpartitionen

- Jeder Graph G kann geschrieben werden als $G = G[P_1] \cup G[P_2] \cup \ldots \cup G[P_n]$, wobei jedes $G[P_i]$ eine Komponente von G ist.
- Sei dann $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ die Komponenten-Knoten-Partition von G.
- Falls G nicht zusammenhängend ist, können die induzierten Teilgraphen auf der rechten Seite im letzten Satz unzusammenhängend sein.
- Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G, wobei G die Komponenten-Knoten-Partition $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ hat. Dann ist die Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k =$

$$\bigcup \left\{ G\left[P_\ell \cap \bigcap_{i \in s} A_i \cap \bigcap_{i \notin s} \bar{A}_i \right] : 1 \leq \ell \leq n, s \subset \{1, 2, \ldots, j\} \right\}$$

Knotenpartitionen

- Beachte: die Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k$ ist eine Subpartition der Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j-1} C_k$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$.

$\Rightarrow$ Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ bewirkt eine geschachtelte Sequenz von $m + 1$ Knotensubpartitionen von der Komponenten-Knoten-Partition $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ bis hinunter zur minimalen Partition bestehend aus lauter einzelnen Knoten.

- Cut C_i des Slicings $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ kann einige Komponenten von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ intakt lassen.

$\Rightarrow$ sinnvoll: spezifizieren, welche Komponenten durch C_i wirklich zertrennt werden