Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2009/10

Übersicht

1. Zusammenhang
   - Fundamentale Sätze
   - Schnitte minimaler Kantenkapazität

Der Satz von Menger

Satz ("Satz von Menger")

Seien s und t zwei Knoten eines ungerichteten Graphen. Wenn s und t nicht adjazent sind, dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter s-t-Pfade gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Knoten-Separators.

Satz (Kantenversion)

Die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Pfade ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Kanten-Separators.

(Ford/Fulkerson, Dantzig/Fulkerson, Elias/Feinstein/Shannon, 1956)

Eng verwandt: MaxFlow-MinCut-Theorem
(Kantenversion von Menger's Theorem kann als Spezialfall gesehen werden, wo alle Kantengewichte den gleichen Wert haben.)

Whitney's Theorem

Satz (Whitney, 1932)

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-(knoten-)zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k knotendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Schwierig bei der Herleitung ist nur, dass der Satz von Menger fordert, dass die Knoten nicht adjazent sind.
Da diese Bedingung bei der Kantenversion nicht auftritt, folgt aus dieser sofort:

Satz

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-kanten-zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k kantendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Gemischter Knoten-/Kanten-Zusammenhang

Definition

Ein Paar (k, l) heißt *Zusammenhangspaar* zweier Knoten s und t eines Graphen, falls eine Menge aus k Knoten und l Kanten existiert, die jeden Weg zwischen s und t beim Entfernen zerstört, aber es keine solche Menge bestehend aus $k - 1$ Knoten und l Kanten oder k Knoten und $l - 1$ Kanten gibt.

Satz (Beineke & Harary, 1967)

Wenn (k, l) ein Zusammenhangspaar zweier Knoten s und t in einem Graphen ist, dann gibt es $k + l$ kantendisjunkte Pfade von s nach t, von denen k knotendisjunkte s-t-Pfade sind.

Einfache Schranken

Satz

Der maximale (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist

$$\begin{array}{rl} \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor : & \textit{falls } m \geq n-1 \\ 0 : & \textit{sonst} \end{array}$$

Der minimale (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist

$$\begin{array}{rl} m - \binom{n-1}{2} : & \textit{falls } \binom{n-1}{2} < m \leq \binom{n}{2} \\ 0 : & \textit{sonst} \end{array}$$

Für jeden Graphen G mit $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *gilt:* $\lambda(G) = \delta(G)$.

Überlappung von k-Knoten-Komponenten

Die offensichtliche Tatsachen, dass

- zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten keinen Knoten gemeinsam haben können und
- zwei verschiedene Blöcke höchstens einen Knoten gemeinsamen haben können,

lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Satz

Zwei verschiedene k-(Knoten-)Komponenten haben höchstens $k - 1$ *Knoten gemeinsam.*

Nicht-Überlappung von k-Kanten-Komponenten

Satz (Matula, 1968)

Für jede natürliche Zahl k sind die k-Kanten-Komponenten eines Graphen knotendisjunkt.

Nicht-Überlappung von k-Kanten-Komponenten

Beweis.

- Betrachte (überlappende) Zerlegung $\tilde{G} = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t$ eines zusammenhängenden Teilgraphen $\tilde{G}$ von G.
- Sei $C = (A, \bar{A})$ ein minimaler Kanten-Schnitt von $\tilde{G}$.
- Annahme: $\tilde{G}$ hat mindestens zwei Knoten (sonst trivial)
- Für jeden Teilgraph G_i, der eine bestimmte Kante e des MinCuts C enthält, enthält C auch einen Schnitt für G_i. Ansonsten wäre dieser Teil überflüssig da alle Knoten in $G_i - C$ (und damit auch in $\tilde{G} - C$) noch zusammenhängen, und das würde der Minimum-Bedingung des Schnitts widersprechen.

$\Rightarrow$ $\exists G_i$: $\lambda(\tilde{G}) = |C| \geq \lambda(G_i)$
(denn jede Kante aus C gehört zu mindestens einer k-Kanten-Komponente G_i)

$\Rightarrow$ $\lambda(\tilde{G}) \geq \min_{1 \leq i \leq t}\{\lambda(G_i)\}$

Satz von Mader

Obwohl aus der fundamentalen Ungleichung $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ folgt, dass k-Knoten-/Kanten-Zusammenhang einen Minimalgrad $\geq k$ impliziert, ist das Gegenteil nicht unbedingt der Fall.
Ein hoher Durchschnittsgrad impliziert aber die Existenz eines relativ gut zusammenhängenden Teilgraphen:

Satz (Mader, 1972)

Jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $4k$ enthält einen k-zusammenhängenden Teilgraph.

Kanten-Schnitte minimalen Gewichts (Minimum Cuts)

- ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E)$
- zwei disjunkte Knotenteilmengen $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$
- Gewichtssumme der Kanten von einem Knoten in X zu einem Knoten in Y: $w(X, Y)$ (für gerichtete Graphen analog)

Fakt

Ein Kanten-Schnitt minimalen Gewichts in einem zusammenhängenden Graphen mit echt positiven Kantengewichten induziert einen zusammenhängenden Teilgraphen.

Minimum Cuts

Lemma

Sei $(S, V \setminus S)$ ein Minimum Cut in $G = (V, E)$. Dann gilt für jede nicht-leere Teilmenge T von S:

$$w(T, S \setminus T) \geq \frac{\lambda}{2}$$

Beweis.

- Annahme: $w(T, S \setminus T) < \frac{\lambda}{2}$
- $w(T, V \setminus S) + w(S \setminus T, V \setminus S) = \lambda$
- o.B.d.A.: $w(T, V \setminus S) \leq \frac{\lambda}{2}$
  (sonst vertausche T und $S \setminus T$)

$\Rightarrow$ $w(T, V \setminus T) = w(T, S \setminus T) + w(T, V \setminus S) < \lambda$ (Widerspruch)

$\square$

Minimum Cuts

Notation:

- $\bar{X} = V \setminus X$
- Im Folgenden werden wir einen Schnitt $(X, \bar{X})$ oft einfach nur mit X bezeichnen.

Lemma

Seien $(A, \bar{A})$ und $(B, \bar{B})$ mit $A \neq B$ zwei Minimum Cuts in $G = (V, E)$, so dass $T = A \cup B$ auch ein Minimum Cut in G ist. Dann gilt:

$$w(A, \bar{T}) = w(B, \bar{T}) = w(A \setminus B, B) = w(A, B \setminus A) = \frac{\lambda}{2}$$

Minimum Cuts

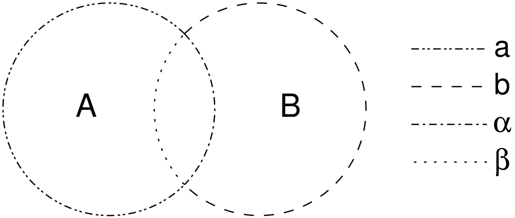


Abbildung: Schnitt zweier Minimum Cuts A und B

Minimum Cuts

Beweis.

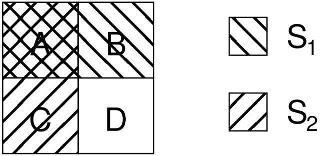
- Sei $a = w\left(A, \bar{T}\right)$,
  $b = w\left(B, \bar{T}\right)$,
  $\alpha = w\left(A, B \setminus A\right)$ und
  $\beta = w\left(B, A \setminus B\right)$.

$\Rightarrow$ $w\left(A, \bar{A}\right) = a + \alpha = \lambda$,
$w\left(B, \bar{B}\right) = b + \beta = \lambda$
$w\left(T, \bar{T}\right) = a + b = \lambda$

- Es gilt auch:
  $w\left(A \setminus B, B \cup \bar{T}\right) = a + \beta \geq \lambda$ und
  $w\left(B \setminus A, A \cup \bar{T}\right) = b + \alpha \geq \lambda$.
- Dieses (Un-)Gleichungssystem hat nur eine Lösung:
  $a = \alpha = b = \beta = \frac{\lambda}{2}$.

□

Minimum Cuts

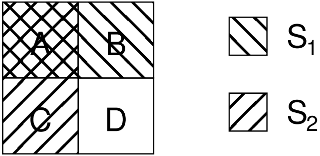


Definition

Ein Paar $\langle S_1, S_2 \rangle$ heißt Crossing Cut, falls S_1, S_2 Minimum Cuts sind und keine der folgenden Mengen leer ist:

- $A = S_1 \cap S_2$,
- $B = S_1 \setminus S_2$,
- $C = S_2 \setminus S_1$
- $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$

Crossing Cuts



Lemma

Seien $\langle S_1, S_2 \rangle$ Crossing Cuts und seien Mengen wie folgt definiert: $A = S_1 \cap S_2$, $B = S_1 \setminus S_2$, $C = S_2 \setminus S_1$ *and* $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. *Dann gilt:*

1. A, B, C *und* D *sind Minimum Cuts.*
2. $w(A, D) = w(B, C) = 0$
3. $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$

Crossing Cuts

Beweis.

- Da S_1 und S_2 Minimum Cuts sind, gilt:
  - $w\left(S_1, \bar{S}_1\right) = w(A,C) + w(A,D) + w(B,C) + w(B,D) = \lambda$
  - $w\left(S_2, \bar{S}_2\right) = w(A,B) + w(A,D) + w(B,C) + w(C,D) = \lambda$

$\Rightarrow$ $w(A,B) + w(A,C) + 2w(A,D) + 2w(B,C) + w(B,D) + w(C,D) = 2\lambda$

- Da es keinen Schnitt mit Kapazität $< \lambda$ gibt, gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
w\left(A, \bar{A}\right) &=& w(A,B) + w(A,C) + w(A,D) \geq \lambda \\
w\left(B, \bar{B}\right) &=& w(A,B) + w(B,C) + w(B,D) \geq \lambda \\
w\left(C, \bar{C}\right) &=& w(A,C) + w(B,C) + w(C,D) \geq \lambda \\
w\left(D, \bar{D}\right) &=& w(A,D) + w(B,D) + w(C,D) \geq \lambda
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $2[w(A,B) + w(A,C) + w(A,D) + w(B,C) + w(B,D) + w(C,D)] \geq 4\lambda$

$\Rightarrow$ $w(A,D) = w(B,C) = 0$ (keine Diagonalkanten)

Crossing Cuts

Beweis.

- Die waagerechte Linie in der Abbildung entspricht dem Minimum Cut $\left(S_1, \bar{S_1}\right) = (A \cup B, C \cup D) = \lambda$, die senkrechte entspricht $\left(S_2, \bar{S_2}\right) = (A \cup C, B \cup D) = \lambda$.
- Analogie: Länge der Kanten entspricht Kapazität der geschnittenen Kanten
- Annahme: die waagerechte und senkrechte Linie schneiden sich nicht genau in der Mitte

$\Rightarrow$ Dann definiert eine der Teilmengen $X = A$, B, C oder D einen Schnitt $w(X, \bar{X}) < \lambda$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$ und $w(A, \bar{A}) = w(B, \bar{B}) = w(C, \bar{C}) = w(D, \bar{D}) = \lambda$

$\square$