1 Approximation unabhängiger Mengen

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Eine unabhängige Menge (independent set) in G ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass je zwei Knoten in V' *nicht* durch eine Kante in E verbunden sind, d.h., es gilt $\{v, w\} \notin E$ für alle $v, w \in V'$. Die Berechnung unabhängiger Mengen maximaler Kardinalität (maximum independent set) ist NP-schwer. Eine bezüglich Inklusion maximale unabhängige Menge lässt sich jedoch leicht berechnen. Zunächst initialisieren wir eine leere unabhängige Menge I. Anschließend wiederholen wir die folgenden Schritte bis es keinen wählbaren Knoten mehr gibt: Wähle einen Knoten $v \in V$ und füge diesen zur Menge I hinzu. Lösche nun den Knoten v sowie seine Nachbarn $N(v)$ (inklusive der inzidenten Kanten). Das Verfahren ist im folgenden Algorithmus dargestellt.

Algorithmus 1 : Greedy Independent Set($G = (V, E)$)

begin
    $I := \emptyset$
    while $V \neq \emptyset$ **do**
        wähle einen Knoten $v \in V$
        $I := I \cup \{v\}$
        $G := G \setminus (N(v) \cup \{v\})$
end

2 Färbung von Graphen

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Eine Färbung von G ist eine Funktion $c\colon V \to \mathbb{N}$. Eine Färbung von G heißt *zulässig*, wenn für alle Kanten $\{v, w\} \in E$ gilt $c(v) \neq c(w)$. Eine zulässige Färbung mit k verschiedenen Zahlen (Farben) heißt k-Färbung. Im Allgemeinen ist das Problem zu entscheiden, ob ein Graph k-färbbar ist, NP-vollständig. Wir können jedoch eine Färbung approximieren, indem wir unabhängige Mengen verwenden. Da zwischen je zwei Knoten v und w einer unabhängigen Menge I keine Kante existiert, können die Knoten in I mit einer Farbe gefärbt werden. Anschließend entfernen wir diese Knoten inklusive inzidenter Kanten und wiederholen diese Vorgehensweise (mit einer neuen Farbe) bis es keinen ungefärbten Knoten mehr gibt.

Algorithmus 2 : Färbung($G = (V, E)$)

begin
    $i := 0$
    while $V \neq \emptyset$ **do**
        $I :=$IndependentSet(G)
        $c(v) := i$ für alle $v \in I$
        $G := G \setminus I$
        $i := i + 1$
end