Beispiel 49

- Die folgende Grammatik ist regulär:

$$S \to \epsilon,\ S \to A,$$
$$A \to aa,\ A \to aaA$$

- Eine Produktion

$$A \to Bcde$$

  heißt linkslinear.

- Eine Produktion

$$A \to abcDef$$

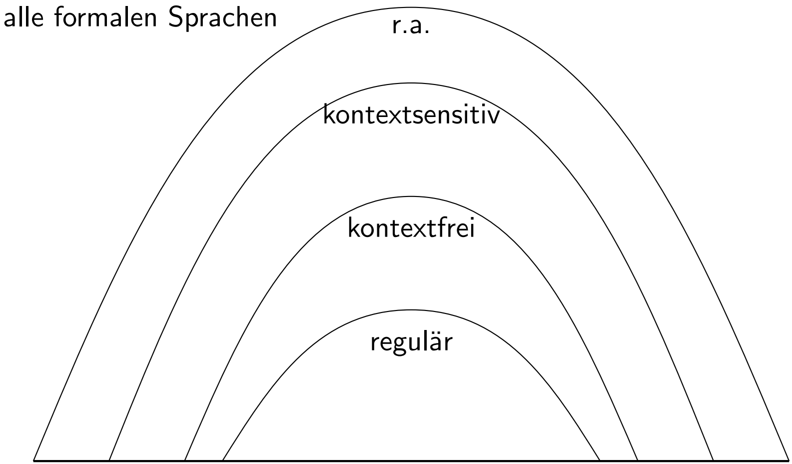
  heißt linear.

Definition 50

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt vom Typ k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, falls es eine Chomsky-k-Grammatik G mit $L(G) = L$ gibt.

In der Chomsky-Hierarchie bilden also die Typ-3- oder regulären Sprachen die kleinste, unterste Stufe, darüber kommen die kontextfreien, dann die kontextsensitiven Sprachen. Oberhalb der Typ-1-Sprachen kommen die Typ-0-Sprachen, die auch rekursiv aufzählbar oder semientscheidbar genannt werden. Darüber (und nicht mehr Teil der Chomsky-Hierarchie) findet sich die Klasse aller formalen Sprachen.

In Typ-3-Grammatiken müssen entweder alle Produktionen rechtslinear oder alle linkslinear sein.
Überlegen Sie sich eine lineare Grammatik, deren Sprache nicht regulär ist! (Beweismethode später!)


alle formalen Sprachen
r.a.
kontextsensitiv
kontextfrei
regulär

Lemma 51

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Chomsky-Grammatik, so dass alle Produktionen $\alpha \to \beta$ die Bedingung $\alpha \in V$ erfüllen. Dann ist $L(G)$ kontextfrei.

Beweis:

Definition 52

Ein $A \in V$ mit $A \to^* \epsilon$ heißt nullierbar.

Bestimme alle nullierbaren $A \in V$:

$N := \{A \in V;\ (A \to \epsilon) \in P\}$
$N' := \emptyset$
while $N \neq N'$ **do**
  $N' := N$
  $N := N' \cup \{A \in V;$
      $(\exists (A \to \beta) \in P)[\beta \in N'^*]\}$
od

Wie man leicht durch Induktion sieht, enthält N zum Schluss genau alle nullierbaren $A \in V$.

Sei nun G eine Grammatik, so dass alle linken Seiten $\in V$, aber die Monotoniebedingung nicht unbedingt erfüllt ist.
Modifiziere G zu G' mit Regelmenge P' wie folgt:

1. für jedes $(A \to x_1x_2 \cdots x_n) \in P$, $n \geq 1$, füge zu P' alle Regeln $A \to y_1y_2 \cdots y_n$ hinzu, die dadurch entstehen, dass für nicht-nullierbare x_i $y_i := x_i$ und für nullierbare x_i die beiden Möglichkeiten $y_i := x_i$ und $y_i := \epsilon$ eingesetzt werden, ohne dass die ganze rechte Seite $= \epsilon$ wird.
2. falls S nullierbar ist, sei T ein neues Nichtterminal; füge zu P' die Regeln $S \to \epsilon$ und $S \to T$ hinzu, ersetze S in allen rechten Seiten durch T und ersetze jede Regel $(S \to x) \in P'$, $|x| > 0$, durch $T \to x$.

Lemma 53

$G' = (V \cup T, \Sigma, P', S)$ *ist kontextfrei, und es gilt*

$$L(G') = L(G)\ .$$

Beweis:

Klar! $\square$

Auch für reguläre Grammatiken gilt ein entsprechender Satz über die "Entfernbarkeit" nullierbarer Nichtterminale:

Lemma 54

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Chomsky-Grammatik, so dass für alle Regeln $\alpha \rightarrow \beta \in P$ gilt:

$$\alpha \in V \textit{ und } \beta \in \Sigma^* \cup \Sigma^* V \ .$$

Dann ist $L(G)$ regulär.

Beweis:

Übungsaufgabe! $\square$

Beispiel 55

Typ 3: $L = \{a^n;\ n \in \mathbb{N}\}$, Grammatik:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & a, \\ S & \rightarrow & aS \end{array}$$

Typ 2: $L = \{a^n b^n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$, Grammatik:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \epsilon, \\ S & \rightarrow & T, \\ T & \rightarrow & ab, \\ T & \rightarrow & aTb \end{array}$$

Wir benötigen beim Scannen *einen* Zähler.

Beispiel 55 (Forts.)

Typ 1: $L = \{a^n b^n c^n;\ n \in \mathbb{N}\}$, Grammatik:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSXY, \\ S &\rightarrow abY, \\ YX &\rightarrow XY, \\ bX &\rightarrow bb, \\ bY &\rightarrow bc, \\ cY &\rightarrow cc \end{aligned}$$

Wir benötigen beim Scannen *mindestens zwei* Zähler.

Bemerkung: Diese Grammatik entspricht *nicht* unserer Definition des Typs 1, sie ist aber (längen-)monoton. Wir zeigen als Hausaufgabe, dass monotone und Typ 1 Grammatiken die gleiche Sprachklasse erzeugen!