Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Jonas Pfoh

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 3
09. November 2007

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin: 16.11.2007 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Lemma 2.7 aus dem Skript sagt folgendes aus:
Sei $S = \{s_1, ..., s_n\}$ eine Menge mit paarweise verschiedenen Prioritäten $prio(s_k)$. Dann ist im Treap T für S das Element s_j genau dann ein Vorgänger von s_i, wenn gilt:

$$prio(s_j) = \min(prio(S_{i,j}))$$

wobei $\min(prio(S_{i,j}))$ die kleinste Priorität in $S_{i,j} = \{s_i, ..., s_j\}$ bezeichnet.

Beweisen Sie dieses Lemma.

Aufgabe 2

Satz 3.1 aus dem Skript sagt folgendes aus:
Für eine beliebige Menge $D \subseteq U$ der Grösse n gibt es bei zufällig ausgewählter Hashfunktion $h : U \to S$ mit $S = \{0, ..., n-1\}$ erwartungsgemäss mindestens einen Platz $y \in S$ mit $\Theta(\frac{\log n}{\log\log n})$ vielen Elementen $x \in D$ mit $h(x) = y$.

Der im Skript angegebene Beweis zeigt den Erwartungswert der Anzahl von Positionen in S, die mindestens $(1-\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}$ Elemente haben (für ein beliebiges $\epsilon > 0$).
Zeigen Sie nun, dass es mit hoher Wahrscheinlichkeit (d.h. Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \frac{1}{n}$) mindestens eine Position $y \in S$ mit mindestens $(1-\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}$ Elementen gibt.

Aufgabe 3

Das Geburtstagsparadoxon (Satz 3.2 aus dem Skript) sagt folgendes aus:
Für eine beliebige Menge $D \subseteq U$ der Grösse n gibt es bei zufällig ausgewählter Hashfunktion $h : U \to S$ mit $|S| \leq \binom{n}{2}$ erwartungsgemäss mindestens eine Position $y \in S$ mit mindestens zwei Elementen $x \in D$ mit $h(x) = y$.

Beweisen Sie das Geburtstagsparadoxon. (Hinweis: Definieren Sie Indikatorvariablen $X_{i,j}$ dafür, dass zwei Elemente $i, j \in D$ die Eigenschaft haben, dass $h(i) = h(j)$ ist.

Aufgabe 4

Nehmen Sie an dass es n Bälle in $\frac{n}{c \log n}$ Körben gibt. Alle Bälle sind zufällig und uniform auf die Körbe verteilt. Sei B die Menge Bälle, sei K die Menge Körbe, und sei A(i) die Anzahl der Bälle in Korb i. Beweisen Sie die folgende Aussage für $\delta > 0$:

$$\forall_{k \in K}((1-\delta)c \log n) \leq A(k) \leq ((1+\delta)c \log n), m.h.W.$$

Mit hoher Wahrscheinlichkeit (m.h.W.) heisst Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \frac{1}{n}$.