3. Anwendung der Unentscheidbarkeitsresultate auf kontextfreie Sprachen

Wie wir gesehen haben, gilt:

1. die regulären Sprachen sind unter allen Booleschen Operationen abgeschlossen.
2. die kontextfreien Sprachen sind nicht unter Komplement und Durchschnitt abgeschlossen.

Können wir entscheiden, ob der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen leer ist?

Sie M eine (beliebige) TM (mit nur einem Band) mit Bandalphabet Σ und Zustandsmenge Q, sei $\# \notin \Sigma \cup Q$.

Definition 153

Definiere die Sprachen

$C_M^{(0)} :=$ $\{c_0 \# c_1^R \# c_2 \# c_3^R \ldots c_{2m+1}^R;\quad m \geq 0$, c_i ist Konfiguration von M, c_0 ist Anfangskonfiguration auf leerem Band, c_{2m+1} ist Endkonfiguration oder $c_{2m} = c_{2m+1}$ und c_{2m} ist Endkonfiguration, und c_{2j+1} ist Nachfolgekonfiguration von c_{2j} für alle j $\}$

$C_M^{(1)} :=$ $\{c_0 \# c_1^R \# c_2 \# c_3^R \ldots c_{2m+1}^R;$ wie oben, jetzt aber: c_{2j} ist Nachfolgekonfiguration von c_{2j-1} für alle zutreffenden $j \geq 1\}$

Bemerkung: $C_M^{(0)}$ enthält nicht nur „echte“ Rechnungen von M, da $c_{2j-1} \rightarrow c_{2j}$ nicht unbedingt ein Schritt sein muss; das fordern wir jeweils nur für $c_{2j} \rightarrow c_{2j+1}$.

Lemma 154

Die Sprachen $C_M^{(0)}$ und $C_M^{(1)}$ sind deterministisch kontextfrei.

Beweis:

Es ist einfach, jeweils einen DPDA dafür zu konstruieren. $\square$

Bemerkung: Ein Kellerautomat ist lange nicht so mächtig wie eine Turingmaschine. Aber zwei Kellerautomaten (oder eine endliche Kontrolle mit zwei Kellern) sind so mächtig wie eine Turingmaschine (siehe Übung).

Lemma 155

$$w \in H_0 \Leftrightarrow C_{M_w}^{(0)} \cap C_{M_w}^{(1)} \neq \emptyset$$

Beweis:

Unmittelbar aus der Definition der beiden Sprachen! □

Bemerkung: Falls M_w deterministisch ist und $w \in H_0$, dann enthält $C_{M_w}^{(0)} \cap C_{M_w}^{(1)}$ genau ein Element, nämlich die eine Rechnung von M_w auf leerem Band.

Satz 156

Das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar!

Beweis:

siehe oben □

Wir haben sogar gezeigt: Das Schnittproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar!

In der Literatur wird dieser Satz üblicherweise mit dem Post'schen Korrespondenzproblem (PCP) bewiesen, das nach Emil Post (1897–1954) benannt ist.

Definition 157 (Post'sches Korrespondenzproblem)

Gegeben: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$
Frage: gibt es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, \ldots i_r \in \{1, \ldots, n\}$, so dass

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_r} \text{ ?}$$

Satz 158

PCP ist unentscheidbar.

Beweis:

Wir skizzieren, wie man mit Hilfe des PCP die Berechnung einer (det.) TM simulieren kann. Wir haben dazu (u.a.) Paare

$$\begin{aligned} (a, a) &\ \text{für alle } a \in \Sigma \\ (u_1u_2u_3, aqb) &\ \text{gemäß der inversen Übergangsfkt} \\ &\ \text{der TM, mit } a, b \in \Sigma, q \in Q \text{ und} \\ &\ u_1, u_2, u_3 \in \Sigma \cup Q \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die TM bei der lokalen Konfiguration aqb diese im nächsten Schritt zu $u_1u_2u_3$ ändert.

Beweis:

Die allgemeine Situation sieht dann so aus, dass eine geeignete Indexfolge $i_1, \ldots, i_k$ folgende Zeichenreihen erzeugt:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\mathbf{x} & c_1 & \ldots & c_{r-1} & x_1 & \ldots & x_{i-1} & q & x_i & x_{i+1} & \ldots & x_s \\
\mathbf{y} & c_1 & \ldots & c_{r-1} & & & & & & & &
\end{array}
$$

Es müssen nun die einzelnen x_i durch Paare der Form (a, a) gematcht werden, lediglich $x_{i-1} q x_i$ kann nur durch (genau bzw. höchstens) ein Paar der zweiten Form gematcht werden.

Damit ergibt sich wieder die allgemeine Situation wie oben, mit r um 1 erhöht, und man kann das Argument per Induktion abschließen.

Wir überlassen es als Übungsaufgabe herauszufinden, wie auch Anfang und Ende der TM-Berechnung geeignet durch das PCP simuliert werden können. $\square$