Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2006
Übungsblatt 11
14. Juli 2006

Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 21. Juli 2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1

Auf zwei unabhängigen Servern stehe ein Web-Dienst zur Verfügung. Es soll festgestellt werden, welcher Server schnellere Antwortzeiten liefert.
Dazu werden $n = 1000$ Anfragen an die Server geschickt und es wird festgestellt, von welchem Server die Antwort zuerst eintrifft. Dabei gehen wir davon aus, dass Pakete nicht gleichzeitig empfangen werden können. In 540 Fällen antwortet Server A vor Server B.
Wir wählen als Nullhypothese H_0 die Aussage, dass Server B im Mittel schneller ist als Server A.
Kann man für einen entsprechenden statistischen Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,04$ die Nullhypothese annehmen? Formulieren Sie hierzu den Test und weisen Sie Ihre Behauptung nach.

Aufgabe 2

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0, 1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.
2. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.
3. Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

   Dabei sind X_0 und X_1 als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$ zu betrachten mit

$$\Omega = \{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in Q\}, \quad \Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$

$$X_0((x_0, x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0, x_1)) = x_1.$$

Aufgabe 3

1. Wir betrachten Markov-Ketten M mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? Begründung!

2. Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$

   Begründung!

3. Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach langer Zeit im Zustand i zu verbleiben?

Aufgabe 4

Zwei Zustände A und B einer Markov-Kette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient?

2. Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu verbleiben?