Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2006
Übungsblatt 8
23. Juni 2006

Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 30. Juni 2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, mit Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für alle reellen x gilt

$$\Pr\left[\max_{1\le i\le n} X_i \le \log n + x\right] = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n .$$

Geben Sie den Grenzwert an für $n \to \infty$!

Aufgabe 2

Wir benutzen die Funktion $h(t) = 0.027 + 0.0025 \cdot (t-40)^2$ für $t \in \mathbb{R}$, um die „Sterblichkeitsrate“ durch Lungenkrebs von Kettenraucherinnen abzuschätzen, die mindestens $t \ge 40$ Jahre alt sind. Ihre Lebensdauer sei X und es gelte

$$\Pr[X > t \,|\, X > 40] = \exp\left(-\int_{40}^{t} h(s)\mathrm{d}s\right) .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 45-jährige Kettenraucherin mindestens 50 Jahre alt wird?

Aufgabe 3

1. Seien X und Y unabhängige und positivwertige kontinuierliche Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion f_Z von $Z = X/Y$ durch die Dichtefunktionen f_X und f_Y von X bzw. Y aus.

2. Die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch die Koordinaten eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in \{(s,t); s^2 + t^2 \le 4\}$ der x,y-Ebene.

   Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$!
   Sind X und Y unabhängig?
   Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y !

Aufgabe 4

Wir modellieren die tägliche Preisänderung am Aktienmarkt durch eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Ausgehend vom „heutigen" Preis Y_0 ergibt sich dann der Preis Y_n einer Aktie am folgenden n-ten Tag durch

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \quad (n \geq 1)\,,$$

wobei die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Wir nehmen an, dass die Verteilung der Y_n durch den zentralen Grenzwertsatz ausreichend genau beschrieben werden kann.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aktie in 30 Tagen mehr als 112€ wert ist, wenn heute die Aktie 100€ kostet und $\sigma^2 = 1$ gilt?