Satz 80

Für rekurrente Ereignisse gilt

$$H(s) = \frac{1}{1 - T(s)}\,.$$

Beweis:

[Skizze]Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für die Auftrittswahrscheinlichkeit h_n $(n \in \mathbb{N})$

$$h_n = \Pr[H_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[H_n \mid Z = k] \cdot \Pr[Z = k]\,.$$

Gemäß der Definition eines rekurrenten Ereignisses gilt für $k < n$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = \Pr[H_n \mid \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k] = \Pr[H_{n-k}]$$

Beweis (Forts.):

sowie

$$\Pr[H_n \mid Z = n] = 1$$
$$\Pr[H_n \mid Z = k] = 0 \text{ für } k > n\,.$$

Damit folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k] = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k]\,.$$

Für $n = 0$ ergibt die rechte Seite dieser Gleichung 0. Damit entsteht durch Faltung der beiden Folgen $(h_0, h_1, \ldots)$ und $(\Pr[Z = 0], \Pr[Z = 1], \ldots)$ die Folge $(0, h_1, h_2, \ldots)$. Für die erzeugenden Funktionen gilt deshalb $H(s) - 1 = H(s)T(s)$.

$\square$

Beispiel 81

In dem einfachen Fall, dass die Ereignisse $H_1, H_2, \ldots$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p eintreten, ist die Wartezeit geometrisch verteilt.

$$H(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ps^k = 1 + \frac{sp}{1-s} = \frac{sp + 1 - s}{1 - s}\,.$$

Daraus folgt

$$T(s) = 1 - \frac{1}{H(s)} = 1 - \frac{1-s}{sp + 1 - s} = \frac{sp}{1 - (1-p)s}\,.$$

$T(s)$ ist also die w.e. Funktion der geometrischen Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Korollar 82

Für rekurrente Ereignisse gilt $\Pr[Z < \infty] = 1$ *genau dann, wenn* $H(1) = \infty$ *ist, wenn also die Summe* $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ *der Auftrittswahrscheinlichkeiten divergiert.*

Beweis:

Nach Satz 80 gilt $T(s) = (H(s) - 1)/H(s)$. Daraus folgt

$$\Pr[Z < \infty] = T(1) = 1 - 1/H(1)\,.$$

□

Beispiel 83

Wir wenden Korollar 82 auf den Random Walk im $\mathbb{Z}^d$ an. Aus der Stirlingformel folgt

$$n! = \Theta(\sqrt{n}(n/e)^n)$$

und damit für $d = 1$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta\left(\frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(\frac{e^n}{\sqrt{n}n^n}\right)^2\right) = \Theta\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right).$$

Beispiel (Forts.)

Also

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-1/2}) = \infty,$$

da die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ *für* $\alpha \leq 1$ *divergiert. Nach Korollar 82 kehrt das Partikel also mit Wahrscheinlichkeit* 1 *immer wieder zum Ausgangspunkt zurück.*

Beispiel (Forts.)

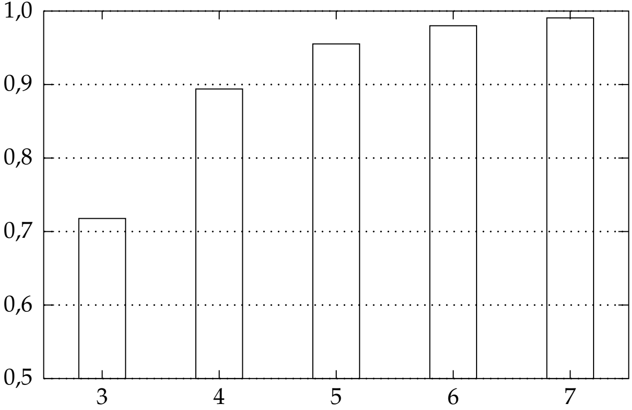
Für $d \in \mathbb{N}$ gilt allgemein

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-(1/2)d}).$$

Für $d = 1$ und $d = 2$ divergiert diese Summe, während sie für $d \geq 3$ konvergiert. Das Partikel kehrt also im ein- und im zweidimensionalen Raum mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausgangspunkt zurück, im drei- oder höherdimensionalen Raum jedoch nicht mehr. Im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{„Partikel kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück"}] \\
&= \Pr[Z = \infty] = 1/H(1) = 1/\sum_{k=0}^{\infty}(\binom{2k}{k}2^{-2k})^3 \\
&\approx 0{,}7178\,.
\end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)



WS(„Keine Rückkehr zum Anfang“) für den Random Walk in $\mathbb{Z}^d$

8. Formelsammlung

8.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden seien A und B, sowie $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Die Notation $A \uplus B$ steht für $A \cup B$ und zugleich $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung). $A_1 \uplus \ldots \uplus A_n = \Omega$ bedeutet also, dass die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ eine Partition der Ergebnismenge Ω bilden.

$\Pr[\emptyset] = 0$
$0 \leq \Pr[A] \leq 1$
$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 9	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A\|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.

$B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$\Pr[B] > 0,\ B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i\|B] = \frac{\Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^{n} \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2\|A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n\|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
A und B unabhängig $\iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

8.2 Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Für Erwartungswert und Varianz gelten die folgenden Formeln (sofern $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ existieren).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \\
\Big(&= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i], \quad \text{falls } W_X \subseteq \mathbb{N}_0 \Big)
\end{aligned}$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= \textstyle\sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot (x - \mathbb{E}[X])^2
\end{aligned}$$

Varianz

8.3 Gesetze zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Seien a, b, a_1, …, $a_n \in \mathbb{R}$, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\iff$ für alle $a_1, \ldots, a_n$ $$\Pr[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] = \Pr[X_1 = a_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = a_n]$$
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\implies$ $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig
$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$

$X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \implies$ $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$	Monotonie des Erwartungswerts
$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]$	
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$	
$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$	

$\mathbb{E}[a_1X_1 + \ldots + a_nX_n]$ $= a_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n]$	Linearität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$	Multiplikativität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$	Varianz einer Summe

$X \geq 0 \implies \Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$ für $t > 0$	Markov
$\Pr[\lvert X - \mathbb{E}[X]\rvert \geq t] \leq \mathrm{Var}[X]/t^2$ für $t > 0$	Chebyshev
siehe Satz 62	Gesetz der großen Zahlen

Kapitel II Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

1. Einführung

1.1 Motivation

Interpretation der Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung.

Beispiel 84

Wir betrachten das Szenario: Bei einem Druckerserver kommen Aufträge in einer Warteschlange an, die alle $1/n$ Zeiteinheiten vom Server abgefragt wird. Der Server nimmt also zu den diskreten Zeitpunkte $1/n, 2/n, 3/n, \ldots$ neue Aufträge entgegen. Durch den Grenzwert $n \to \infty$ „verschmelzen" diese diskreten Zeitpunkte zu einer kontinuierlichen Zeitachse und für die Zufallsvariable T, welche die Zeitspanne bis zum Eintreffen des nächsten Auftrags misst, reicht eine diskrete Wertemenge W_T nicht mehr aus.

1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Definition 85

Eine kontinuierliche oder auch stetige Zufallsvariable X und ihr zugrunde liegender kontinuierlicher (reeller) Wahrscheinlichkeitraum sind definiert durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \,\mathrm{d}\, x = 1.$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, die durch Vereinigung $A = \bigcup_k I_k$ abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle beliebiger Art (offen, geschlossen, halboffen, einseitig unendlich) gebildet werden kann, heißt Ereignis. Ein Ereignis A tritt ein, wenn X einen Wert aus A annimmt. Die Wahrscheinlichkeit von A ist bestimmt durch

$$\Pr[A] = \int_A f_X(x) \,\mathrm{d}\, x = \sum_k \int_{I_k} f_X(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

Beispiel 86 (Gleichverteilung)

Eine besonders einfache kontinuierliche Dichte stellt die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ dar. Sie ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

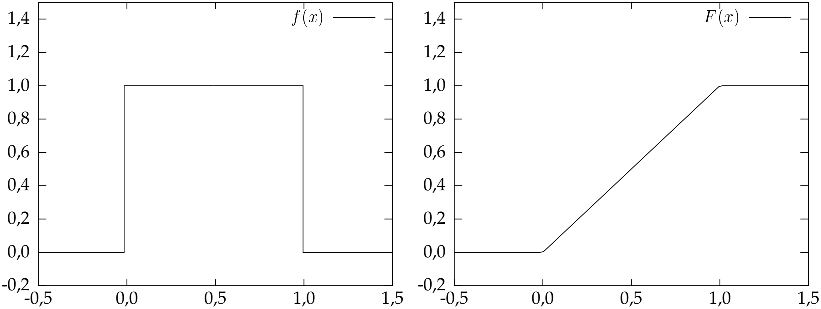
Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte f_X eine Verteilung oder Verteilungsfunktion F_X zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \leq x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Beispiel 87

Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$



Gleichverteilung über dem Intervall $[0, 1]$

Beobachtungen: *(Eigenschaften der Verteilungsfunktion)*

- F_X ist monoton steigend.
- F_X ist stetig. Man spricht daher auch von einer „stetigen Zufallsvariablen“.
- Es gilt: $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
- Jeder (außer an endlich vielen Punkten) differenzierbaren Funktion F, welche die zuvor genannten Eigenschaften erfüllt, können wir eine Dichte f durch $f(x) = F'(x)$ zuordnen.

Es gilt

$$\Pr[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)\,.$$

Bei den von uns betrachteten Dichten besteht zwischen den Ereignissen „$a < X \leq b$“, „$a \leq X \leq b$“, „$a \leq X < b$“ und „$a < X < b$“ kein wesentlicher Unterschied, da

$$\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$