7.2.1 Zufällige Summen

Wir betrachten die Situation, dass $Z := X_1 + \ldots + X_N$, wobei N ebenfalls eine Zufallsvariable ist.

Satz 76

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_X(s)$. N sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_N(s)$. Dann besitzt die Zufallsvariable $Z := X_1 + \ldots + X_N$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $W_N \subseteq \mathbb{N}_0$. Deshalb folgt mit Satz 35

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^Z \mid N = n] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1+\ldots+X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n \cdot \Pr[N = n] \\ &= \mathbb{E}[(G_X(s))^N] \\ &= G_N(G_X(s)) \,. \end{aligned}$$

$\square$

7.3 Rekurrente Ereignisse

Beispiel 77 (Random Walk im d-dimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^d$)

Wir betrachten ein Partikel, das sich zufällig auf den Punkten aus $\mathbb{Z}$ bewegt. Es starte im Punkt 0 und bewege sich in jedem Zeitschritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ vom Punkt i zum Punkt $i+1$ („nach rechts“) bzw. $i-1$ („nach links“). Man nennt dieses Experiment auch *Random Walk auf den ganzen Zahlen*. Abbildung 1 veranschaulicht diesen Prozess.

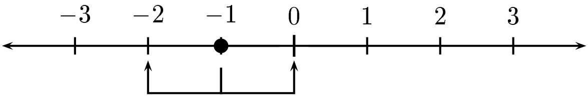

Abbildung: Random Walk auf den ganzen Zahlen

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne H_k das Ereignis $H_k :=$ „Partikel befindet sich im k-ten Schritt im Punkt 0". Die Anzahl der Schritte nach rechts bzw. nach links bis zum k-ten Schritt ist binomialverteilt mit den Parametern $n = k$ und $p = 1/2$.

Für die Wahrscheinlichkeit $h_k := \Pr[H_k]$ erhalten wir deshalb

$$h_k = \binom{k}{k/2} 2^{-k}\,,$$

falls k gerade ist und $h_k = 0$ sonst.

Verallgemeinerung auf $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$:

$$h_k = \left(\binom{k}{k/2} 2^{-k}\right)^d \text{ für } k \text{ gerade.}$$

Sei h'_k die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel im k-ten Schritt zum ersten Mal zum Punkt 0^d zurückkehrt, und sei $r := \sum_{k=1}^{\infty} h'_k$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel irgendwann zum Startpunkt zurückkehrt.

Wie hängt r von d ab?

Der gerade beschriebene Prozess hat die Eigenschaft, dass sich das Experiment nach jedem Besuch im Zustand 0 wieder genauso verhält wie beim Start des Prozesses im Zustand 0. Mit solchen Ereignissen beschäftigt sich die Erneuerungstheorie (engl. renewal theory).

Definition 78

Die Ereignisse $H_1, H_2, \ldots$ heißen rekurrent, wenn für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$ gilt, dass

$$\Pr[H_i \mid \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j] = \Pr[H_{i-j}]\,.$$

Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe die Wartezeit bis zum Auftreten des ersten Ereignisses H_k. Die Dichte von Z ist definiert durch

$$\Pr[Z = k] = \Pr[\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k],$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k]$.

Definition 79

Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne $h_i := \Pr[H_i]$ die Auftrittswahrscheinlichkeit im i-ten Zeitschritt. Wir setzen $h_0 := 1$ und erhalten die erzeugende Funktion der Auftrittswahrscheinlichkeiten gemäß

$$H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \,.$$

Ferner sei die erzeugende Funktion der Wartezeit Z gegeben durch

$$T(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k] \cdot s^k \,.$$

Bemerkung:

$H(s)$ ist keine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion im Sinne der Definition. So gilt i.a. nicht $H(1) = 1$. Auch $T(s)$ stellt keine „echte" wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion dar, da

$$\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Pr[Z = k] = 1 - T(1)$$

fehlt!