SS 2005

Einführung in die Informatik IV

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2005SS/info4/index.html.de

17. Juni 2005

Satz 147

H_s ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Angenommen, es gäbe eine Turing-Maschine M, die H_s entscheidet. Indem man i.W. die Antworten von M umdreht, erhält man eine TM, die L_d entscheidet. Widerspruch! $\square$

Satz 147

H_s ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Angenommen, es gäbe eine Turing-Maschine M, die H_s entscheidet. Indem man i.W. die Antworten von M umdreht, erhält man eine TM, die L_d entscheidet. Widerspruch! $\square$

2.3 Unentscheidbarkeit

Definition 148

Unter dem (allgemeinen) Halteproblem H versteht man die Sprache

$$H = \{\langle x, w\rangle \in \{0,1\}^*;\ M_x \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Satz 149

Das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Eine TM, die H entscheidet, könnten wir benutzen, um eine TM zu konstruieren, die H_s entscheidet. $\square$

Bemerkung: H und H_s sind beide rekursiv aufzählbar!

2.3 Unentscheidbarkeit

Definition 148

Unter dem (allgemeinen) Halteproblem H versteht man die Sprache

$$H = \{\langle x, w\rangle \in \{0,1\}^*;\ M_x \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Satz 149

Das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Eine TM, die H entscheidet, könnten wir benutzen, um eine TM zu konstruieren, die H_s entscheidet. $\square$

Bemerkung: H und H_s sind beide rekursiv aufzählbar!

2.3 Unentscheidbarkeit

Definition 148

Unter dem (allgemeinen) Halteproblem H versteht man die Sprache

$$H = \{\langle x, w\rangle \in \{0,1\}^*;\ M_x \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Satz 149

Das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Eine TM, die H entscheidet, könnten wir benutzen, um eine TM zu konstruieren, die H_s entscheidet. $\square$

Bemerkung: H und H_s sind beide rekursiv aufzählbar!

2.3 Unentscheidbarkeit

Definition 148

Unter dem (allgemeinen) Halteproblem H versteht man die Sprache

$$H = \{\langle x, w\rangle \in \{0,1\}^*;\ M_x \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Satz 149

Das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Eine TM, die H entscheidet, könnten wir benutzen, um eine TM zu konstruieren, die H_s entscheidet. $\square$

Bemerkung: H und H_s sind beide rekursiv aufzählbar!

Definition 150

Seien A, $B \subseteq \Sigma^*$. Dann heißt A (effektiv) reduzierbar auf B gdw $\exists f: \Sigma^* \to \Sigma^*$, f total und berechenbar mit

$$(\forall w \in \Sigma^*)[w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B]\,.$$

Wir schreiben auch

$$A \hookrightarrow_f B \text{ bzw. } A \hookrightarrow B\,.$$

bzw. manchmal

$$A \leq B \text{ oder auch } A \preceq_f B\,.$$

Ist A mittels f auf B reduzierbar, so gilt insbesondere

$$f(A) \subseteq B \text{ und } f(\bar{A}) \subseteq \bar{B}\,.$$

Definition 150

Seien A, $B \subseteq \Sigma^*$. Dann heißt A (effektiv) reduzierbar auf B gdw $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, f total und berechenbar mit

$$(\forall w \in \Sigma^*)[w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B]\,.$$

Wir schreiben auch

$$A \hookrightarrow_f B \text{ bzw. } A \hookrightarrow B\,.$$

bzw. manchmal

$$A \leq B \text{ oder auch } A \preceq_f B\,.$$

Ist A mittels f auf B reduzierbar, so gilt insbesondere

$$f(A) \subseteq B \text{ und } f(\bar{A}) \subseteq \bar{B}\,.$$

Definition 150

Seien A, $B \subseteq \Sigma^*$. Dann heißt A (effektiv) reduzierbar auf B gdw $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, f total und berechenbar mit

$$(\forall w \in \Sigma^*)[w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B]\,.$$

Wir schreiben auch

$$A \hookrightarrow_f B \text{ bzw. } A \hookrightarrow B\,.$$

bzw. manchmal

$$A \leq B \text{ oder auch } A \preceq_f B\,.$$

Ist A mittels f auf B reduzierbar, so gilt insbesondere

$$f(A) \subseteq B \text{ und } f(\bar{A}) \subseteq \bar{B}\,.$$

Satz 151

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

(i) B *rekursiv* $\Rightarrow$ A *rekursiv.*

(ii) B *rekursiv aufzählbar* $\Rightarrow$ A *rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.

Satz 151

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

(i) B *rekursiv* $\Rightarrow$ A *rekursiv.*

(ii) B *rekursiv aufzählbar* $\Rightarrow$ A *rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.

(ii) $\chi'_A = \chi'_B \circ f$.

$\square$

Satz 151

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

(i) B *rekursiv* $\Rightarrow$ A *rekursiv.*

(ii) B *rekursiv aufzählbar* $\Rightarrow$ A *rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.

(ii) $\chi'_A = \chi'_B \circ f$.

$\square$

Satz 151

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

(i) B *rekursiv* $\Rightarrow$ A *rekursiv.*

(ii) B *rekursiv aufzählbar* $\Rightarrow$ A *rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.

(ii) $\chi'_A = \chi'_B \circ f$.

$\square$

Satz 151

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

(i) B *rekursiv* $\Rightarrow$ A *rekursiv.*

(ii) B *rekursiv aufzählbar* $\Rightarrow$ A *rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.

(ii) $\chi'_A = \chi'_B \circ f$.

$\square$

Satz 151

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

(i) B *rekursiv* $\Rightarrow$ A *rekursiv.*

(ii) B *rekursiv aufzählbar* $\Rightarrow$ A *rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.

(ii) $\chi'_A = \chi'_B \circ f$.

$\square$

Definition 152

Das Halteproblem auf leerem Band H_0 ist

$$H_0 = \{w \in \{0,1\}^*;\ M_w \text{ hält auf leerem Band}\}\,.$$

Satz 153

H_0 ist unentscheidbar (nicht rekursiv).

Definition 152

Das Halteproblem auf leerem Band H_0 ist

$$H_0 = \{w \in \{0,1\}^*;\ M_w \text{ hält auf leerem Band}\}\,.$$

Satz 153

H_0 ist unentscheidbar (nicht rekursiv).

Beweis:

Betrachte die Abbildung f, die definiert ist durch:

$$\{0,1\}^* \ni w \mapsto f(w),$$

$f(w)$ ist die Gödelnummer einer TM, die, auf leerem Band angesetzt, zunächst $c_2(w)$ auf das Band schreibt und sich dann wie $M_{c_1(w)}$ (angesetzt auf $c_2(w)$) verhält. Falls das Band nicht leer ist, ist es unerheblich, wie sich $M_{f(w)}$ verhält.

f ist total und berechenbar.

Es gilt: $w \in H \quad \Leftrightarrow M_{c_1(w)}$ angesetzt auf $c_2(w)$ hält
$\Leftrightarrow M_{f(w)}$ hält auf leerem Band
$\Leftrightarrow f(w) \in H_0$

also $H \hookrightarrow_f H_0$ und damit H_0 unentscheidbar. $\square$

Beweis:

Betrachte die Abbildung f, die definiert ist durch:

$$\{0,1\}^* \ni w \mapsto f(w),$$

$f(w)$ ist die Gödelnummer einer TM, die, auf leerem Band angesetzt, zunächst $c_2(w)$ auf das Band schreibt und sich dann wie $M_{c_1(w)}$ (angesetzt auf $c_2(w)$) verhält. Falls das Band nicht leer ist, ist es unerheblich, wie sich $M_{f(w)}$ verhält.

f ist total und berechenbar.

Es gilt: $w \in H \Leftrightarrow M_{c_1(w)}$ angesetzt auf $c_2(w)$ hält
$\Leftrightarrow M_{f(w)}$ hält auf leerem Band
$\Leftrightarrow f(w) \in H_0$

also $H \hookrightarrow_f H_0$ und damit H_0 unentscheidbar. $\square$

Beweis:

Betrachte die Abbildung f, die definiert ist durch:

$$\{0,1\}^* \ni w \mapsto f(w),$$

$f(w)$ ist die Gödelnummer einer TM, die, auf leerem Band angesetzt, zunächst $c_2(w)$ auf das Band schreibt und sich dann wie $M_{c_1(w)}$ (angesetzt auf $c_2(w)$) verhält. Falls das Band nicht leer ist, ist es unerheblich, wie sich $M_{f(w)}$ verhält.

f ist total und berechenbar.

Es gilt: $w \in H \Leftrightarrow M_{c_1(w)}$ angesetzt auf $c_2(w)$ hält
$\Leftrightarrow M_{f(w)}$ hält auf leerem Band
$\Leftrightarrow f(w) \in H_0$

also $H \hookrightarrow_f H_0$ und damit H_0 unentscheidbar. $\square$

Beweis:

Betrachte die Abbildung f, die definiert ist durch:

$$\{0,1\}^* \ni w \mapsto f(w),$$

$f(w)$ ist die Gödelnummer einer TM, die, auf leerem Band angesetzt, zunächst $c_2(w)$ auf das Band schreibt und sich dann wie $M_{c_1(w)}$ (angesetzt auf $c_2(w)$) verhält. Falls das Band nicht leer ist, ist es unerheblich, wie sich $M_{f(w)}$ verhält.

f ist total und berechenbar.

Es gilt:
$$\begin{aligned} w \in H \quad &\Leftrightarrow M_{c_1(w)} \text{ angesetzt auf } c_2(w) \text{ hält} \\ &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ hält auf leerem Band} \\ &\Leftrightarrow f(w) \in H_0 \end{aligned}$$

also $H \hookrightarrow_f H_0$ und damit H_0 unentscheidbar. $\square$

Bemerkung

Es gibt also keine allgemeine algorithmische Methode, um zu entscheiden, ob ein Programm anhält.

Satz 154 (Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller (TM)-berechenbaren Funktionen und $\mathcal{S}$ eine nichttriviale Teilmenge von $\mathcal{R}$ (also $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$). Dann ist

$$G(\mathcal{S}) := \{w \in \{0,1\}^*; \ \ \textit{die von } M_w \textit{ berechnete Funktion ist in } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Beweis:

Sei Ω die total undefinierte Funktion.

1. Fall: $\Omega \in \mathcal{S}$

Sei $q \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$ (es gibt ein derartiges q, da $\mathcal{S}$ nichttrivial), Q eine TM für q.
Zu $w \in \{0,1\}^*$ sei $f(w) \in \{0,1\}^*$ Gödelnummer einer TM, für die gilt:

1. bei Eingabe x ignoriert $M_{f(w)}$ diese zunächst und verhält sich wie M_w auf leerem Band.
2. wenn obige Rechnung hält, dann verhält sich $M_{f(w)}$ wie Q auf der Eingabe x.

f ist total und berechenbar.

Beweis:
Sei Ω die total undefinierte Funktion.

1. Fall: $\Omega \in \mathcal{S}$

Sei $q \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$ (es gibt ein derartiges q, da $\mathcal{S}$ nichttrivial), Q eine TM für q.
Zu $w \in \{0,1\}^*$ sei $f(w) \in \{0,1\}^*$ Gödelnummer einer TM, für die gilt:

1. bei Eingabe x ignoriert $M_{f(w)}$ diese zunächst und verhält sich wie M_w auf leerem Band.
2. wenn obige Rechnung hält, dann verhält sich $M_{f(w)}$ wie Q auf der Eingabe x.

f ist total und berechenbar.

Beweis:

Sei Ω die total undefinierte Funktion.

1. Fall: $\Omega \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad &\Leftrightarrow M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q \ (\neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)}\text{-berechnete Funktion ist nicht in } \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f(w) \notin G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Beweis:
Sei Ω die total undefinierte Funktion.

1. Fall: $\Omega \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad & \Leftrightarrow M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ & \Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q \ (\neq \Omega) \\ & \Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)}\text{-berechnete Funktion ist nicht in } \mathcal{S} \\ & \Leftrightarrow f(w) \notin G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Also: $\bar{H}_0 \hookrightarrow_f G(\mathcal{S})$.

Beweis:
Sei Ω die total undefinierte Funktion.

1. Fall: $\Omega \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad &\Leftrightarrow M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q\ (\neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)}\text{-berechnete Funktion ist nicht in } \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f(w) \notin G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Also: $\bar{H}_0 \hookrightarrow_f G(\mathcal{S})$.

H_0 unentscheidbar (nicht rekursiv) $\Rightarrow \bar{H}_0$ unentscheidbar $\Rightarrow G(\mathcal{S})$ unentscheidbar.

Beweis:

Sei Ω die total undefinierte Funktion.

2. Fall: $\Omega \notin \mathcal{S}$

Seien $q \in \mathcal{S}, Q, f$ wie im Fall 1.

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q \ (\neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion ist in } \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f(w) \in G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Beweis:

Sei Ω die total undefinierte Funktion.

2. Fall: $\Omega \notin \mathcal{S}$

Seien $q \in \mathcal{S}, Q, f$ wie im Fall 1.

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q\ (\neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion ist in } \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f(w) \in G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Also: $H_0 \hookrightarrow_f G(\mathcal{S})$.

Beweis:

Sei Ω die total undefinierte Funktion.

2. Fall: $\Omega \notin \mathcal{S}$

Seien $q \in \mathcal{S}, Q, f$ wie im Fall 1.

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q \ (\neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion ist in } \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f(w) \in G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Also: $H_0 \hookrightarrow_f G(\mathcal{S})$.

H_0 unentscheidbar $\Rightarrow G(\mathcal{S})$ unentscheidbar.

$\square$

Beweis:

Sei Ω die total undefinierte Funktion.

2. Fall: $\Omega \notin \mathcal{S}$

Seien $q \in \mathcal{S}, Q, f$ wie im Fall 1.

$$\begin{aligned} w \in H_0 \quad &\Leftrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q \ (\neq \Omega) \\ &\Leftrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion ist in } \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f(w) \in G(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Also: $H_0 \hookrightarrow_f G(\mathcal{S})$.

H_0 unentscheidbar $\Rightarrow G(\mathcal{S})$ unentscheidbar.

$\square$

Wir zeigen hier nur diesen Satz. Setzt man weitere Eigenschaften von $\mathcal{S}$ voraus, kann man sogar zeigen, dass $G(\mathcal{S})$ nicht einmal rekursiv aufzählbar ist.