
Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Gegeben zwei Zufallsvariablen X und Y . Zeigen Sie:

- Wenn X und Y unabhängig sind sowie den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz haben, so gilt $\mathbb{E}((X - Y)^2) = 2\text{Var}(X)$.
- Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt $\mathbb{E}((X + Y)(X - Y)) = \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(X - Y)$.
- Es gilt $\text{Var}(X + Y) + \text{Var}(X - Y) = 2\text{Var}(X) + 2\text{Var}(Y)$.

Aufgabe 2

Wir wählen nacheinander zufällig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes CHOOSE aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen:

- $X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen), bis C gezogen.
- $Y :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis C gezogen.
- $Z :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis beide O gezogen.

Aufgabe 3

Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

Aufgabe 4

Es wird so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \dots, 6$ einmal gekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariable X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Wie groß sind $\mathbb{E}(X)$ und $\text{Var}(X)$?

Aufgabe 5

Heureka! Wir haben eine Maschine erfunden, die DS-II Hausaufgaben automatisch löst, und werden sie gleich morgen in Betrieb nehmen. Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist die Maschine allerdings recht fehleranfällig und geht mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[t] = C/t^4$ in genau t Tagen von heute an kaputt.

- Wie groß ist C ?
- Welche Lebensdauer erwarten Sie für die Maschine? (Hinweis: Sie dürfen $\zeta(3) \approx 1.2021$ annehmen, wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(\sigma) = \sum_{n \geq 1} n^{-\sigma}$ sei.)
- Welche Varianz hat die erwartete Lebensdauer?
- In 10 Tagen stellen wir fest, dass die Maschine immer noch läuft. Wie lange erwarten wir nun, dass es dauert, bis sie kaputt geht?