Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h. c. Wilfried Brauer

Sommersemester 2005
Diskrete Strukturen II
Merkblatt 1
15. April 2005
Dr. Werner Meixner

Diskrete Strukturen II: Merkblatt 1

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Diskrete Strukturen I und II behandeln die mathematischen Grundlagen der Algorithmik algebraischer Strukturen und Graphen. Den Schwerpunkt im 2. Kurs bildet die wahrscheinlichkeitstheoretische Fortführung der Kombinatorik vom 1. Kurs. Dieses erste Merkblatt thematisiert den Unterschied zwischen mathematischer Wahrscheinlichkeitstheorie und der natürlichen Wahrscheinlichkeitslogik.

Ereignis

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist Teil der natürlichen Logik, mit der wir eine dynamisch sich verändernde Welt logisch erfassen. Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis“ und „Vorgang“. Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“ stets als „Ergebnis“ eines „Vorgangs“. Umgekehrt schließt jeder (elementare) Vorgang ab mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses, das sein Ergebnis darstellt. Die logischen Kategorien „Ereignis“ und „Vorgang“ bestimmen sich gegenseitig.

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch Algorithmen beschrieben, in der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“. Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.

Häufigkeit

Ein wesentliches Bestimmungsmerkmal der logischen Kategorie ‘Vorgang’ ist die „Wiederholbarkeit“. Grundsätzlich können sich Vorgänge wiederholen mit „gleichen“ Ereignisvorkommen als Ergebnis. Man denke z. B. an die wiederholte Ausführung von Algorithmen oder Experimenten in einem „gleichen Kontext“. Ereignisse können „mehrfach vorkommen“ und alle „Vorkommen“ eines bestimmten Ereignisses sind gleich. Ein (elementarer) Vorgang endet mit einem (wiederholten) Vorkommen eines Ereignisses. Die Kardinalität (Grösse, Anzahl der Elemente) der Menge der Vorkommen eines Ereignisses nennt man „Häufigkeit“ des Ereignisses.

Vorkommen von Ereignissen und Elementarereignisse

Eine Menge von ‘Vorkommen’, z. B. Vorkommen von Ereignissen, wird als eine „Multimenge“ beschrieben und zwar deshalb, weil gleiche Vorkommen stets Wiederholungen darstellen, die zwar zählbar sind, aber keine begrifflich unterscheidbaren Bestimmungsmerkmale aufweisen. Wir erinnern uns an Mengen von Urnen und Bällen im 1. Kurs, die mal unterscheidbar waren, ein andermal aber nicht unterscheidbar sein sollten. Selbstverständlich waren auch dies Beispiele von Multimengen. Die merkwürdigen Bezeichnungen „Urnen“ und „Bälle“ hatten nur dazu gedient, die logische Intuition von mehrfachen (gleichen) Objekten und deren Zuordnung zu unterstützen.

Multimengen basieren auf einer Bestimmungseigenschaft in Gestalt eines Kriteriums bzw. eines Begriffs zur Unterscheidung von gleichen oder nicht gleichen Vorkommen. Jeder dieser elementaren Begriffe steht für eine Klasse von gleichen Vorkommen. Damit ist jeder Multimenge eine gewöhnliche Menge von unterscheidbaren Objekten zugeordnet, die unterscheidbare Klassen von Vorkommen repräsentieren („Elementarprojektion“ der Multimenge).

Im Kontext von Ereignissen nennen wir jeden Begriff gleicher Ereignisvorkommen ein „Elementarereignis“ und stellen jedes Elementarereignis durch ein (gedachtes) „unterscheidbares“ Objekt dar.

Logischer Kontext

Die schon „festgestellten“ oder wiederholten Vorkommen von Ereignissen bilden den „logischen Kontext“, in dem Mengenbildungen vorgenommen werden können. Der Kontext ist erweiterbar (und insofern dynamisch) durch die weitere Ausführung von Experimenten bzw. Algorithmen.

Klar ist, daß die Begriffe der Häufigkeit und der „relativen Häufigkeit“ von Ereignissen ausschließlich durch die Kardinalität der Mengen bestimmt ist, die in einem gegebenen logischen Kontext (z. B. der „beobachteten“ Ereignisse eines wiederholt durchgeführten Experiments) gebildet werden können. Dies ist der Bereich, auf den sich unser „Wissen“ von den Ergebnissen eines Experiments oder eines Algorithmus beziehen kann.

Wahrscheinlichkeit

Es ist prinzipiell nicht möglich, eine Menge zu bilden über „zukünftige“ Vorkommen von Ereignissen oder Wiederholungen von Experimenten. Zukünftige Erweiterungen von Kontexten können nur Gegenstand von „Hypothesen“ sein. Das System der „Wahrscheinlichkeit“ von Ereignissen eines gegebenen Kontextes ist ein System von hypothetischen Grenzwerten der relativen Häufigkeit dieser Ereignisse bei hypothetischer Erweiterung (z. B. durch Wiederholung eines Experiments) des Kontextes.

Es ist aber prinzipiell möglich, Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, denen jede Hypothesenbildung unterworfen sein muss. Beispielweise sollte die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen, die Summe der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der einzelnen Ereignisse sein.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist dabei nicht ein Zahlenwert, der als Kardinalität einer Menge von Vorkommen von Ereignissen gebildet wird. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist vielmehr ein Zahlenwert, der jeweils der Klasse (Menge) von Vorkommen eines bestimmten Ereignisses (diskreter Fall) oder einer Menge von Klassen von Vorkommen von Ereignissen (kontinuierlicher Fall) zugeordnet wird, wobei die Gesamtheit dieser Zahlenwerte gewissen Gesetzen genügen muß. Die Wahrscheinlichkeit ist letztendlich eine Maßfunktion über der Elementarprojektion einer Multimenge von Ereignissen.

Mathematische Wahrscheinlichkeit

Die Mathematik besitzt als Grundbegriff nur den Mengenbegriff unterscheidbarer Elemente. Multimengen gibt es in der Mathematik nur in Gestalt einer Modellierung mit Abbildungen. Entsprechend werden in der Mathematik Ereignisbegriff bzw. Vorkommen von Ereignissen lediglich zur Motivierung eines Teils der Maßtheorie benutzt, nicht aber als Grundbegriffe. Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine axiomatisierende Beschreibung der Wahrscheinlichkeit. Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie ist in dieser Axiomatisierung ein Teil der allgemeinen Maßtheorie.

Zufall

„Zufällig“ nennen wir einen (Einzel-)Vorgang, dessen Ergebnis wir (im Einzelfall) nicht (gesetzmäßig) vorhersagen können. Gelegentlich scheint ein Vorgang zufällig zu sein, wenn wir über die Bedingungen zu wenig wissen, denen er unterliegt. Andererseits zeigt die (Atom-)Physik, daß unsere Ergebnisbeschreibungen gelegentlich informationell überbestimmt sind, d. h., daß die Information gar nicht vorhanden ist, die wir suchen, und uns deshalb die Grundlage von Vorhersagen prinzipiell fehlt.

Dem Phänomen „Zufall“ begegnen wir mit der Wahrscheinlichkeitslogik, die es uns ermöglicht, vom Einzelfall abzusehen und stattdessen aufgrund einer Gesamtheit von Einzelfällen Gesetzmäßigkeiten zu finden.