SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

1.5.2 Binomialverteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable entspricht der Verteilung einer Indikatorvariablen. Häufig betrachtet man jedoch Summen von Indikatorvariablen.

1.5.2 Binomialverteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable entspricht der Verteilung einer Indikatorvariablen. Häufig betrachtet man jedoch Summen von Indikatorvariablen.

Definition: Sei $X := X_1 + \ldots + X_n$ als Summe von n unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p definiert. Dann heißt X binomialverteilt mit den Parametern n und p. In Zeichen schreiben wir

$$\boxed{X \sim \mathrm{Bin}(n, p).}$$

Es gilt $W_X = \{0, \ldots, n\}$. Die Binomialverteilung besitzt die Dichte

$$f_X(x) := b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

mit $q := 1 - p$. Da die Binomialverteilung eine sehr wichtige Rolle spielt, führen wir für die Dichtefunktion die Abkürzung $b(x; n, p)$ ein.

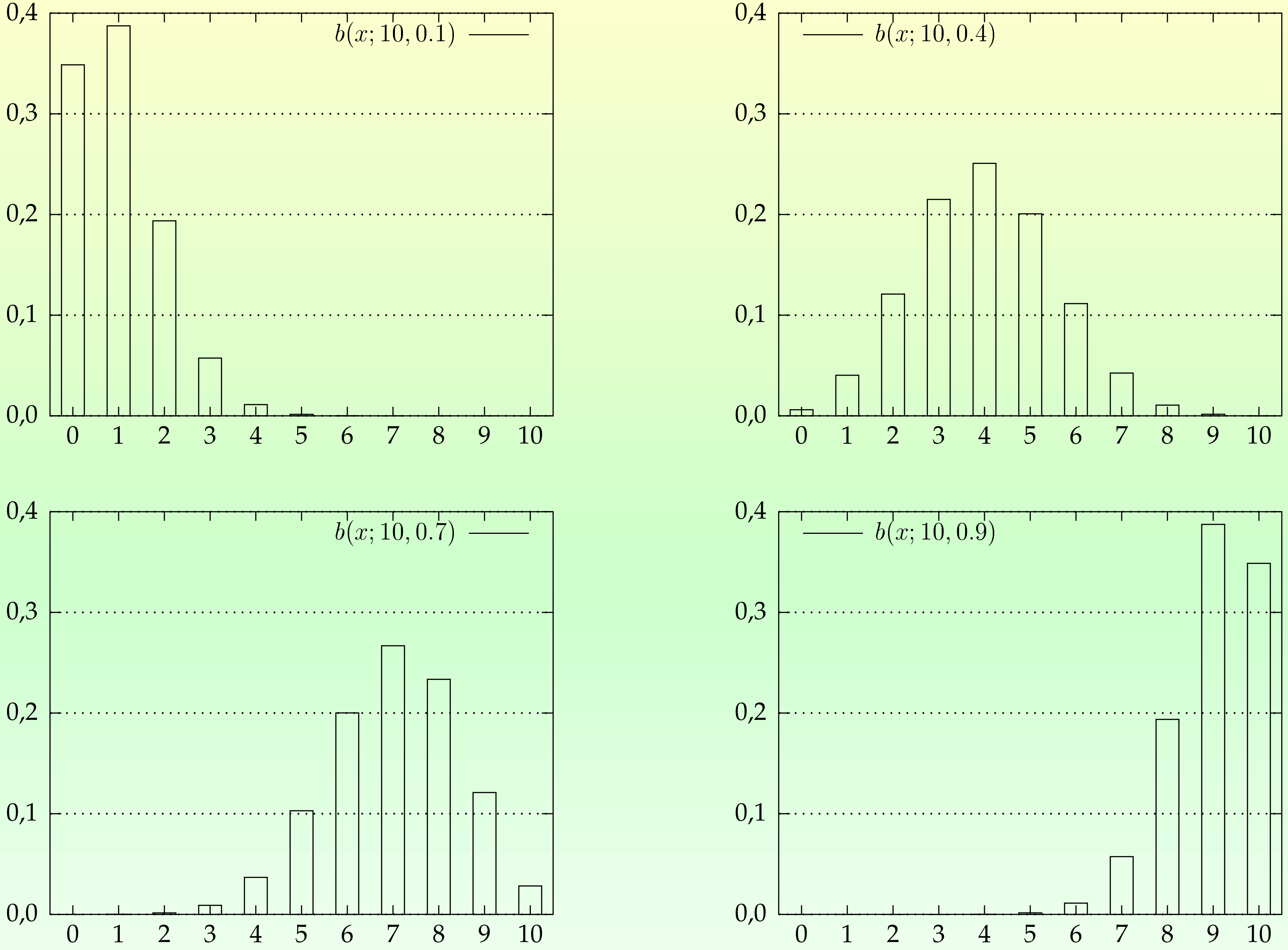
Es gilt $W_X = \{0, \ldots, n\}$. Die Binomialverteilung besitzt die Dichte

$$f_X(x) := b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

mit $q := 1 - p$. Da die Binomialverteilung eine sehr wichtige Rolle spielt, führen wir für die Dichtefunktion die Abkürzung $b(x; n, p)$ ein.

Mit den Sätzen über Erwartungswert und Varianz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen erhalten wir sofort

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = npq\,.$$



Dichte der Binomialverteilung

Satz 19:

Wenn $X \sim \mathrm{Bin}(n_x, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n_y, p)$ unabhängig sind, dann gilt für $Z := X + Y$, dass $Z \sim \mathrm{Bin}(n_x + n_y, p)$.

Satz 19:

Wenn $X \sim \mathrm{Bin}(n_x, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n_y, p)$ unabhängig sind, dann gilt für $Z := X + Y$, dass $Z \sim \mathrm{Bin}(n_x + n_y, p)$.

Beweis: Die Aussage folgt sofort, wenn man gemäß der Definition der Binomialverteilung X und Y als Summen von Indikatorvariablen darstellt. Z ist dann offensichtlich wieder eine Summe von unabhängigen Indikatorvariablen. *q. e. d.*

1.5.3 Geometrische Verteilung

Definition: Die Dichte der geometrischen Verteilung mit Parameter/Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ und $q := 1 - p$ ist gegeben durch

$$f_X(i) = pq^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}\,.$$

1.5.3 Geometrische Verteilung

Definition: Die Dichte der geometrischen Verteilung mit Parameter/Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ und $q := 1-p$ ist gegeben durch

$$f_X(i) = pq^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}\,.$$

Für Erwartungswert und Varianz geometrisch verteilter Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2},$$

1.5.3 Geometrische Verteilung

Definition: Die Dichte der geometrischen Verteilung mit Parameter/Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ und $q := 1-p$ ist gegeben durch

$$f_X(i) = pq^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}\,.$$

Für Erwartungswert und Varianz geometrisch verteilter Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2},$$

denn es gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot pq^{i-1} = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$\mathbb{E}[X^2]$ ergibt sich gemäß der Formel (siehe DS I)

$$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot pq^{i-1} \\
&= p \cdot \left(q \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) \cdot q^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot q^i \right) \\
&= \frac{q \cdot 2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},
\end{aligned}$$

und damit

$\mathbb{E}[X^2]$ ergibt sich gemäß der Formel (siehe DS I)

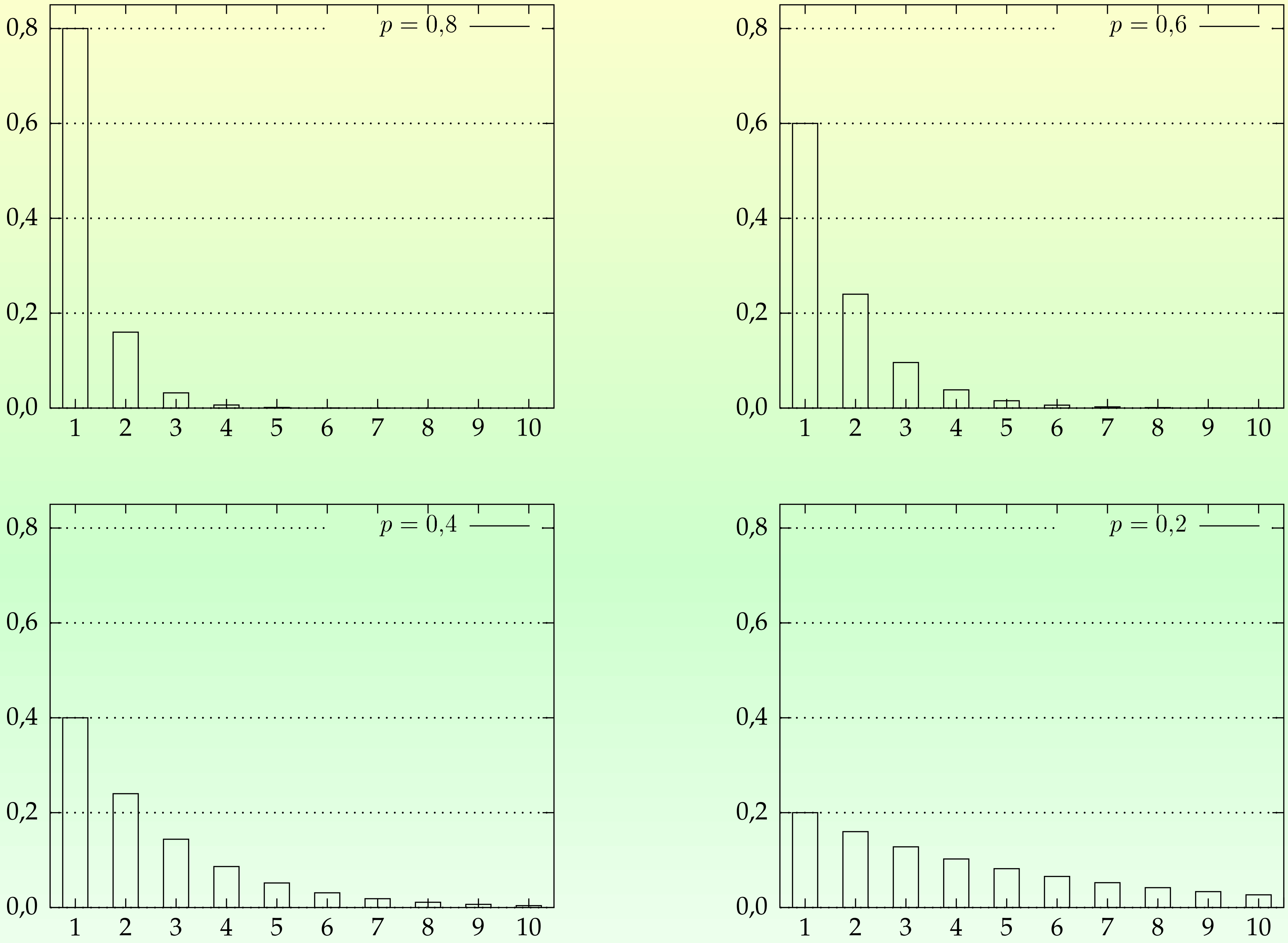
$$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot pq^{i-1} \\
&= p \cdot \left(q \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)\cdot q^i + \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\cdot q^i \right) \\
&= \frac{q\cdot 2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2}.$$



Dichte der geometrischen Verteilung

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann ist $\Pr[X = k]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem binären Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau in der k-ten unabhängigen Wiederholung das erste Mal erfolgreich sind.

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann ist $\Pr[X = k]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem binären Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau in der k-ten unabhängigen Wiederholung das erste Mal erfolgreich sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X > y + x \mid X > x]$?

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann ist $\Pr[X = k]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem binären Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau in der k-ten unabhängigen Wiederholung das erste Mal erfolgreich sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X > y + x \mid X > x]$?

Da bei den ersten x Versuchen kein Erfolg eintrat, stellen wir uns vor, dass das „eigentliche“ Experiment erst ab dem $(x + 1)$-ten Versuch beginnt. Die Zeit bis zum ersten Erfolg bei diesem neuen Experiment nennen wir X'. Damit $X > y + x$ gilt, muss $X' > y$ gelten. Es ist intuitiv, dass X' wieder geometrisch verteilt ist mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, dass also für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Pr[X > y + x \mid X > x] = \Pr[X' > y]. \qquad (1.5.1)$$

Formal gilt

$$
\begin{aligned}
\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\
&= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x \,,
\end{aligned}
$$

Formal gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x\,,\end{aligned}$$

sowie

$$\Pr[X > y + x \mid X > x] = \frac{\Pr[X > y + x, X > x]}{\Pr[X > x]}$$

Formal gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x ,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Pr[X > y + x \mid X > x] &= \frac{\Pr[X > y + x, X > x]}{\Pr[X > x]} \\ &= \frac{\Pr[X > y + x]}{\Pr[X > x]}\end{aligned}$$

Formal gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x\,,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Pr[X > y + x \mid X > x] &= \frac{\Pr[X > y + x, X > x]}{\Pr[X > x]} \\ &= \frac{\Pr[X > y + x]}{\Pr[X > x]} \\ &= (1-p)^{y+x} \cdot (1-p)^{-x} = (1-p)^y\end{aligned}$$

Formal gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i \\ &= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x\,,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Pr[X > y+x \mid X > x] &= \frac{\Pr[X > y+x, X > x]}{\Pr[X > x]} \\ &= \frac{\Pr[X > y+x]}{\Pr[X > x]} \\ &= (1-p)^{y+x}\cdot(1-p)^{-x} = (1-p)^y \\ &= \Pr[X > y]\,.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft nennt man Gedächtnislosigkeit, da eine geometrisch verteilte Zufallsvariable gewissermaßen vergisst, dass sie schon x Misserfolge hinter sich hat und sich deshalb zum Zeitpunkt $y + x$ genauso verhält wie ursprünglich zur Zeit y.

Warten auf den n-ten Erfolg.

Wir betrachten n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die jeweils geometrisch verteilt sind mit Parameter p, und bestimmen die Dichte der Zufallsvariablen $Z := X_1 + \cdots + X_n$. Damit bezeichnet Z also die Anzahl der Versuche bis zum n-ten erfolgreichen Experiment (einschließlich).

Warten auf den n-ten Erfolg.

Wir betrachten n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die jeweils geometrisch verteilt sind mit Parameter p, und bestimmen die Dichte der Zufallsvariablen $Z := X_1 + \cdots + X_n$. Damit bezeichnet Z also die Anzahl der Versuche bis zum n-ten erfolgreichen Experiment (einschließlich).

Falls $Z = z$ ist, so werden also genau n erfolgreiche und $z - n$ nicht erfolgreiche Experimente durchgeführt. Dafür gibt es genau $\binom{z-1}{n-1}$ Möglichkeiten, von denen jede mit Wahrscheinlichkeit $p^n(1-p)^{z-n}$ eintritt. Es gilt also

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n(1-p)^{z-n}.$$

Warten auf den n-ten Erfolg.

Wir betrachten n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die jeweils geometrisch verteilt sind mit Parameter p, und bestimmen die Dichte der Zufallsvariablen $Z := X_1 + \cdots + X_n$. Damit bezeichnet Z also die Anzahl der Versuche bis zum n-ten erfolgreichen Experiment (einschließlich).

Falls $Z = z$ ist, so werden also genau n erfolgreiche und $z - n$ nicht erfolgreiche Experimente durchgeführt. Dafür gibt es genau $\binom{z-1}{n-1}$ Möglichkeiten, von denen jede mit Wahrscheinlichkeit $p^n(1-p)^{z-n}$ eintritt. Es gilt also

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{z-n}.$$

Die Zufallsvariable Z nennt man negativ binomialverteilt mit Ordnung n.

Das Coupon-Collector-Problem

In manchen Branchen legen Firmen den Verpackungen ihrer Produkte oft kleine Bilder oder andere Gegenstände bei, um den Käufer zum Sammeln anzuregen. Wenn es insgesamt n verschiedene solche Beilagen gibt, wie viele Packungen muss man im Mittel erwerben, bis man eine vollständige Sammlung besitzt? Hierbei nehmen wir an, dass bei jedem Kauf jede Beilage mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Das Coupon-Collector-Problem

In manchen Branchen legen Firmen den Verpackungen ihrer Produkte oft kleine Bilder oder andere Gegenstände bei, um den Käufer zum Sammeln anzuregen. Wenn es insgesamt n verschiedene solche Beilagen gibt, wie viele Packungen muss man im Mittel erwerben, bis man eine vollständige Sammlung besitzt? Hierbei nehmen wir an, dass bei jedem Kauf jede Beilage mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Sei

- X die Anzahl der zu tätigenden Käufe, und

Das Coupon-Collector-Problem

In manchen Branchen legen Firmen den Verpackungen ihrer Produkte oft kleine Bilder oder andere Gegenstände bei, um den Käufer zum Sammeln anzuregen. Wenn es insgesamt n verschiedene solche Beilagen gibt, wie viele Packungen muss man im Mittel erwerben, bis man eine vollständige Sammlung besitzt? Hierbei nehmen wir an, dass bei jedem Kauf jede Beilage mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Sei

- X die Anzahl der zu tätigenden Käufe, und
- bezeichne Phase i die Schritte vom Erwerb der $(i-1)$-ten Beilage (ausschließlich) bis zum Erwerb der i-ten Beilage (einschließlich).

Sei etwa $n = 4$, und seien die Beilagen mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ identifiziert. Ein Experiment ist z.B.:

$$\underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 3}_{3}, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_{4} .$$

Sei etwa $n = 4$, und seien die Beilagen mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ identifiziert. Ein Experiment ist z.B.:

$$\underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 3}_{3}, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_{4} .$$

Beobachtung:

Phase i endet genau dann, wenn wir eine der $n - i + 1$ Beilagen erhalten, die wir noch nicht besitzen.

Sei etwa $n = 4$, und seien die Beilagen mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ identifiziert. Ein Experiment ist z.B.:

$$\underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 3}_{3}, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_{4} .$$

Beobachtung:

Phase i endet genau dann, wenn wir eine der $n - i + 1$ Beilagen erhalten, die wir noch nicht besitzen.

Somit ist X_i geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{n-i+1}{n}$ und es gilt $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$.

Damit folgt aber sofort

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Damit folgt aber sofort

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}\end{aligned}$$

Damit folgt aber sofort

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} \\ &= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n,\end{aligned}$$

Damit folgt aber sofort

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} \\
&= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n,
\end{aligned}
$$

wobei $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te harmonische Zahl bezeichnet. Da $H_n = \ln n + O(1)$, folgt $\mathbb{E}[X] = n \ln n + O(n)$.

1.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ hat den Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$ und besitzt die Dichte

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

1.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ hat den Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$ und besitzt die Dichte

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

f_X ist eine zulässige Dichte, da

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) \; = \; \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

1.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ hat den Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$ und besitzt die Dichte

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

f_X ist eine zulässige Dichte, da

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1\,. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}
\end{aligned}
$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda\,.
\end{aligned}
$$

Da

$$\mathbb{E}[X(X-1)] \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}$$

Da

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!}$$

Da

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}
\end{aligned}
$$

Da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2\\ &\quad = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathrm{Var}[X]\,,\end{aligned}$$

folgt

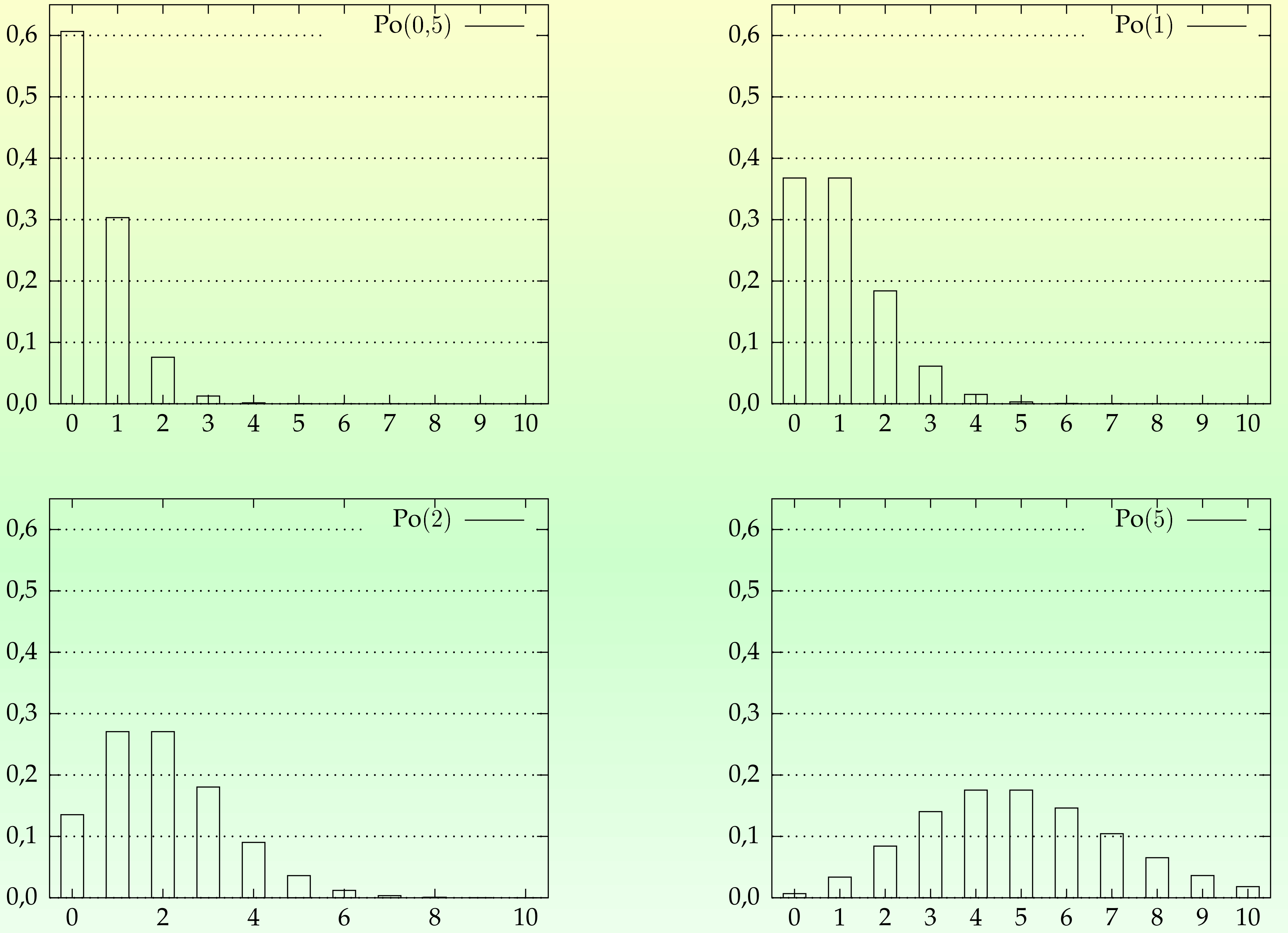
$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad (1.5.2)$$

folgt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad (1.5.2)$$

Dafür, dass eine Zufallsvariable X Poisson-verteilt ist mit Parameter λ, schreiben wir auch

$$\boxed{X \sim \mathrm{Po}(\lambda).}$$



Dichte der Poisson-Verteilung