SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1.2.1 zeigen wir:

Satz 3: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] \,.$$

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1.2.1 zeigen wir:

Satz 3: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] \,.$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] \,.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \ .$$

Da für beliebige i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, sind auch die Ereignisse $B \cap A_i$ und $B \cap A_j$ disjunkt. Wegen (1.2.1) folgt $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (auch für den Fall, dass $\Pr[A_i] = 0$!). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 1) an

$$\Pr[B] = \Pr[B \cap A_1] + \ldots + \Pr[B \cap A_n] =$$
$$\Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \ldots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n]$$

und haben damit die Behauptung gezeigt.

Beweis: Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \ .$$

Da für beliebige i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, sind auch die Ereignisse $B \cap A_i$ und $B \cap A_j$ disjunkt. Wegen (1.2.1) folgt $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (auch für den Fall, dass $\Pr[A_i] = 0$!). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 1) an

$$\Pr[B] = \Pr[B \cap A_1] + \ldots + \Pr[B \cap A_n] =$$
$$\Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \ldots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n]$$

und haben damit die Behauptung gezeigt.

Da der Additionssatz auch für unendlich viele Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ gilt, kann dieser Beweis direkt auf den unendlichen Fall übertragen werden. *q. e. d.*

Mit Hilfe von Satz 3 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

Satz 4: Satz von Bayes

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweis disjunkt, mit $\Pr[A_j] > 0$ für alle j. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit Hilfe von Satz 3 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

Satz 4: Satz von Bayes

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweis disjunkt, mit $\Pr[A_j] > 0$ für alle j. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von B unter den Bedingungen A_i (sowie die Wahrscheinlichkeiten der A_i selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von A_i bedingt auf das Ereignis B.

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von B unter den Bedingungen A_i (sowie die Wahrscheinlichkeiten der A_i selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von A_i bedingt auf das Ereignis B.

Thomas Bayes (1702–1761) war ein bekannter Theologe und Mitglied der Royal Society. Als sein bedeutendstes Werk gilt sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. Diese Arbeit wurde erst 1763 publiziert.

1.3 Unabhängigkeit

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ kann der Fall auftreten, dass die Bedingung auf B, also das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten. Es gilt also $\Pr[A|B] = \Pr[A]$ und wir nennen die Ereignisse A und B unabhängig.

Beispiel: [Zweimaliges Würfeln]

$$\Omega := \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 6\} .$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Beispiel: [Zweimaliges Würfeln]

$$\Omega := \{(i,j) \mid 1 \le i,j \le 6\} .$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Wir definieren die Ereignisse

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Es gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$. Wie groß ist $\Pr[B|A]$?

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von A keine Information in Bezug auf das Ereignis B hinzu:

$$B \cap A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von A keine Information in Bezug auf das Ereignis B hinzu:

$B \cap A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$

Daraus folgt

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B]\,.$$

Das Eintreffen des Ereignisses B hat mit dem Ereignis A „nichts zu tun".

Definition: Die Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]\ .$$

Definition: Die Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]\,.$$

Falls $\Pr[B] \neq 0$, so können wir diese Definition zu

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$$

umschreiben.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln (Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln (Forts.)

Zur Erinnerung:

$$A := \text{Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,}$$
$$B := \text{Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,}$$
$$C := \text{Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.}$$

Bei den Ereignissen A und B ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit A und C?

Beispiel: Zweimaliges Würfeln (Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Bei den Ereignissen A und B ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit A und C?

$$A \cap C = \{(2,5),(4,3),(6,1)\}$$

und damit

$$\Pr[A \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \text{ bzw. } \Pr[C|A] = \Pr[C]\,.$$

Also sind auch A und C (und analog B und C) unabhängig.

Also sind auch A und C (und analog B und C) unabhängig.

Bemerkung:

Im Beispiel ist $A \cap C \neq \emptyset$.
Es gilt sogar allgemein für zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $\Pr[A], \Pr[B] > 0$, dass sie gar nicht disjunkt sein können, da ansonsten

$$0 = \Pr[\emptyset] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \,.$$

Beispiel: Zweimaliges Würfeln (Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln (Forts.)

Zur Erinnerung:

$$A := \text{Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,}$$
$$B := \text{Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,}$$
$$C := \text{Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.}$$

Wir betrachten das Ereignis $A \cap B \cap C$. Wenn $A \cap B$ eintritt, so sind beide gewürfelten Augenzahlen gerade und somit ergibt auch die Summe davon eine gerade Zahl. Daraus folgt $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$ bzw. $\Pr[C|A \cap B] = 0 \neq \Pr[C]$. Das Ereignis $A \cap B$ liefert uns also Information über das Ereignis C.

Definition: Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{1.3.1}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn (1.3.1) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma 5: Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \qquad (1.3.2)$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass aus (1.3.1) die Bedingung (1.3.2) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in $s_1, \ldots, s_n$. Wenn $s_1 = \ldots = s_n = 1$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung $s_1 = 0$. Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad -\Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}].\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass aus (1.3.1) die Bedingung (1.3.2) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in $s_1, \ldots, s_n$. Wenn $s_1 = \ldots = s_n = 1$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung $s_1 = 0$. Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad -\Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}].\end{aligned}$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}&\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}]\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass aus (1.3.1) die Bedingung (1.3.2) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in $s_1, \ldots, s_n$. Wenn $s_1 = \ldots = s_n = 1$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung $s_1 = 0$. Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad -\Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}].\end{aligned}$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}&\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}],\end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen $1 - \Pr[A_1] = \Pr[\bar{A}_1]$ folgt.

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (1.3.2) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt.

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (1.3.2) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt.

Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\Pr[A_1 \cap A_2] = \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}]$$

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (1.3.2) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt.

Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$
\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}]
\end{aligned}
$$

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (1.3.2) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt.

Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3 \in \{0,1\}} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \ldots \cdot \sum_{s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_n^{s_n}]
\end{aligned}$$

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (1.3.2) $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt.

Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \sum_{s_3,\ldots,s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3 \in \{0,1\}} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \ldots \cdot \sum_{s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2],
\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. *q. e. d.*

Aus der Darstellung in Lemma 5 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse A und B auch die Ereignisse $\bar{A}$ und B (und analog auch A und $\bar{B}$ bzw. $\bar{A}$ und $\bar{B}$) unabhängig sind!

Aus der Darstellung in Lemma 5 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse A und B auch die Ereignisse $\bar{A}$ und B (und analog auch A und $\bar{B}$ bzw. $\bar{A}$ und $\bar{B}$) unabhängig sind!

Ebenso folgt:

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe die vorangehende Beobachtung.

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe die vorangehende Beobachtung.

Aus

$$\Pr[(A \cup B) \cap C] = \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe die vorangehende Beobachtung.

Aus

$$
\begin{aligned}
\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C]
\end{aligned}
$$

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe die vorangehende Beobachtung.

Aus

$$\begin{aligned}
\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\
&= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B])
\end{aligned}$$

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe die vorangehende Beobachtung.

Aus

$$
\begin{aligned}
\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\
&= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\
&= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]
\end{aligned}
$$

Lemma 6: Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis: Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe die vorangehende Beobachtung.

Aus

$$
\begin{aligned}
\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\
&= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\
&= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]
\end{aligned}
$$

folgt die Unabhängigkeit von $A \cup B$ und C. *q. e. d.*

1.4 Zufallsvariablen

1.4.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an „Auswirkungen“ oder „Merkmalen“ der (Elementar)Ereignisse interessiert.

Definition: Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge Ω gegeben. Eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

heißt (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt diskret.

Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt diskret.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der Wertebereich

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R};\ \exists\, \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. abzählbar unendlich).

Beispiel: Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir $\Omega := \{H, T\}^3$. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispiel: Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir $\Omega := \{H, T\}^3$. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispielsweise gilt also $Y(HTH) = 2$ und $Y(HHH) = 3$. Y hat den Wertebereich $W_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

Für $W_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $W_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ betrachten wir (für ein beliebiges $1 \le i \le n$ bzw. $x_i \in \mathbb{N}$) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

Für $W_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $W_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ betrachten wir (für ein beliebiges $1 \le i \le n$ bzw. $x_i \in \mathbb{N}$) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

Bemerkung:

Anstelle von $\Pr[X^{-1}(x_i)]$ verwendet man häufig auch die Schreibweise $\Pr[„X = x_i“]$. Analog setzt man

$$\begin{aligned}\Pr[„X \le x_i“] &= \sum_{x \in W_X\,:\,x \le x_i} \Pr[„X = x“] \\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le x_i\}]\,.\end{aligned}$$

Für $W_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $W_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ betrachten wir (für ein beliebiges $1 \le i \le n$ bzw. $x_i \in \mathbb{N}$) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

Bemerkung:

Anstelle von $\Pr[X^{-1}(x_i)]$ verwendet man häufig auch die Schreibweise $\Pr[„X = x_i“]$. Analog setzt man

$$\begin{aligned}\Pr[„X \le x_i“] &= \sum_{x \in W_X\,:\,x \le x_i} \Pr[„X = x“]\\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le x_i\}]\,.\end{aligned}$$

Oft lässt man auch die Anführungszeichen weg.

Definition:

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1] \qquad (1.4.1)$$

nennt man (diskrete) Dichte(funktion) der Zufallsvariablen X.

Definition:

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0,1] \qquad (1.4.1)$$

nennt man (diskrete) Dichte(funktion) der Zufallsvariablen X.

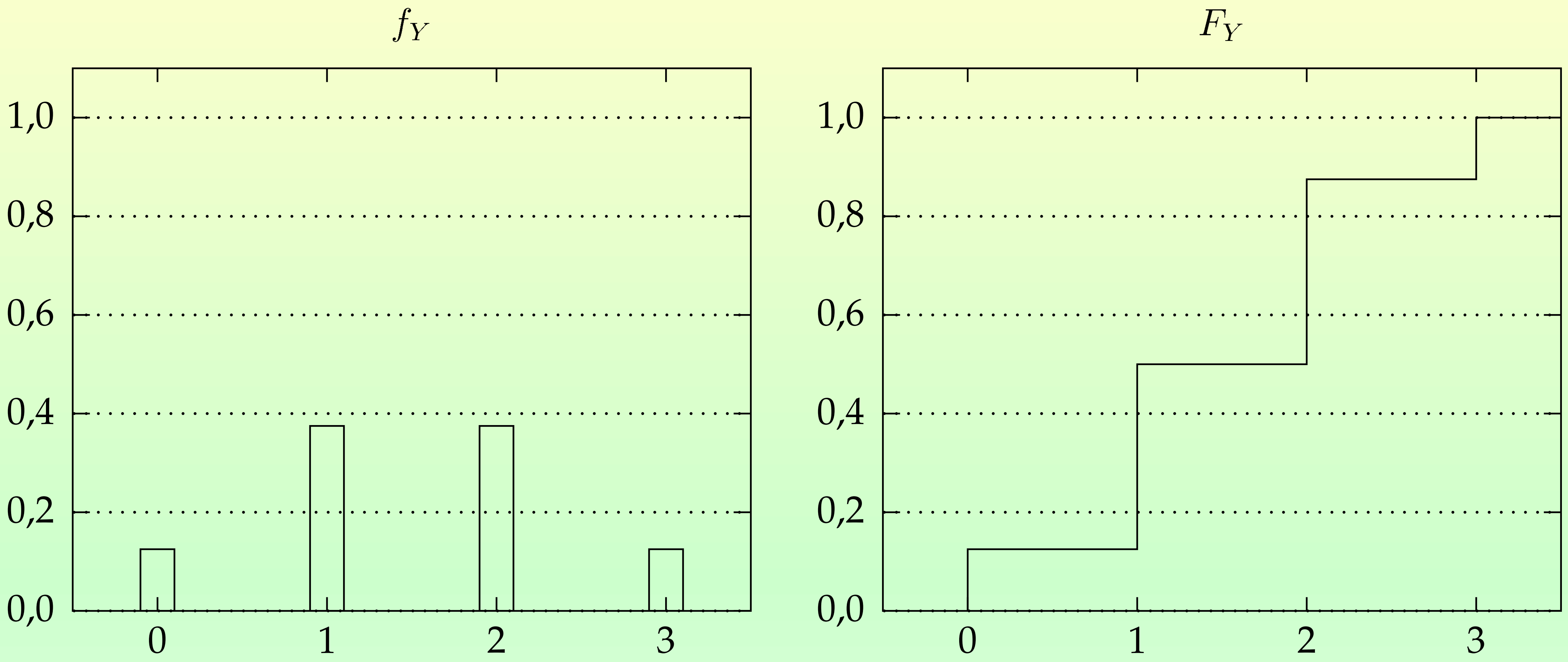
- Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \le x] = \sum_{x \in W_X : x' \le x} \Pr[X = x'] \in [0,1] \qquad (1.4.2)$$

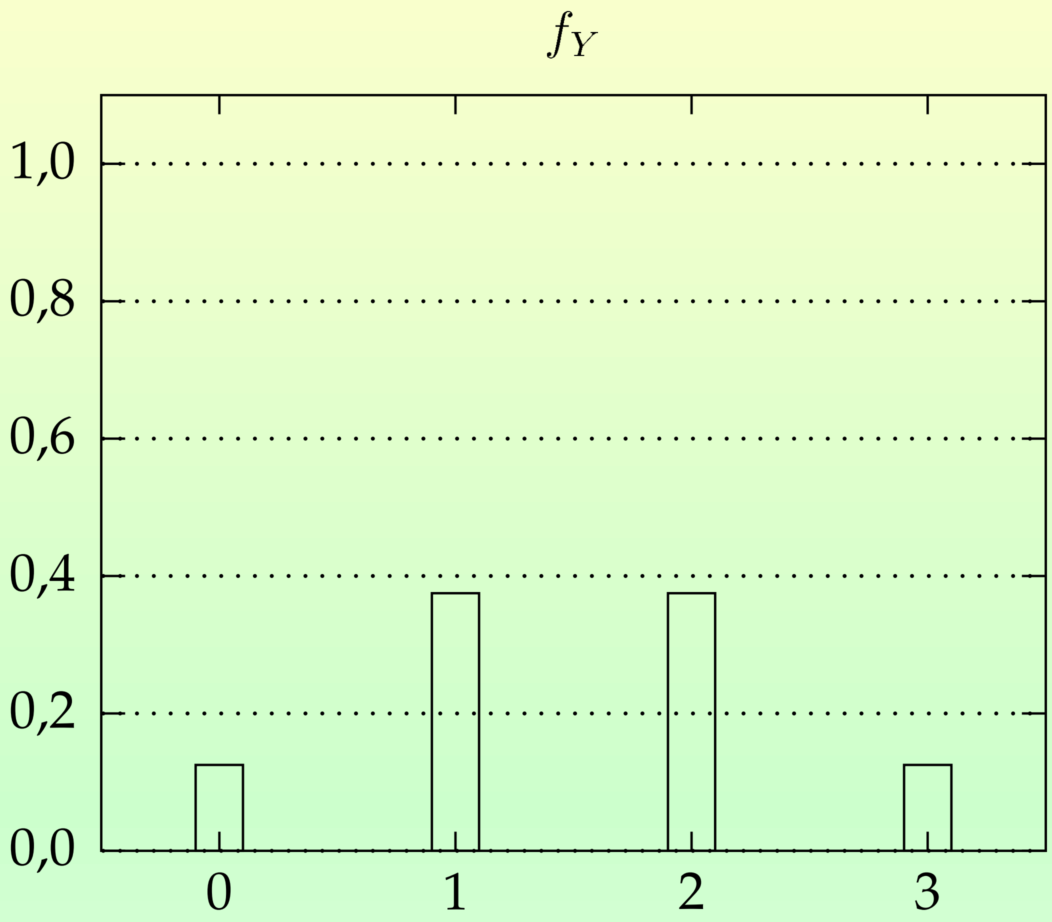
heißt Verteilung(sfunktion) der Zufallsvariablen X.

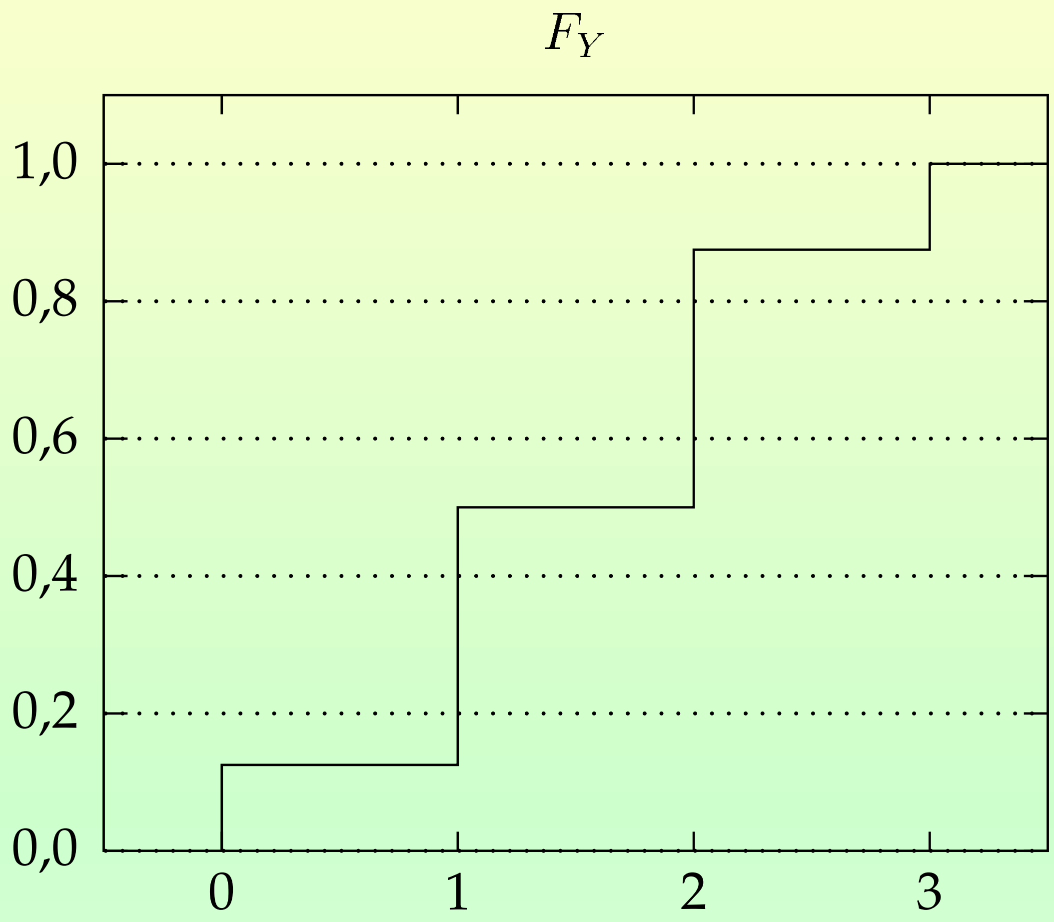
Beispiel: Für die Zufallsvariable Y erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Pr[Y=0] &= \Pr[TTT] = \frac{1}{8},\\
\Pr[Y=1] &= \Pr[HTT] + \Pr[THT] + \Pr[TTH] = \frac{3}{8},\\
\Pr[Y=2] &= \Pr[HHT] + \Pr[HTH] + \Pr[THH] = \frac{3}{8},\\
\Pr[Y=3] &= \Pr[HHH] = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$



Dichte und Verteilung von Y





Dichte und Verteilung von Y

Bemerkung:

Man kann statt Ω auch den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum über W_X betrachten.

1.4.2 Erwartungswert und Varianz

Definition: Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) ,$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

1.4.2 Erwartungswert und Varianz

Definition: Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \, ,$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel:

$$\mathbb{E}[Y] \; = \; \sum_{i=0}^{3} i \cdot \Pr[Y = i]$$

1.4.2 Erwartungswert und Varianz

Definition: Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \,,$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^{3} i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \end{aligned}$$

1.4.2 Erwartungswert und Varianz

Definition: Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) ,$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^{3} i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

Beispiel: Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Head“ zeigt. Sei k die Anzahl der durchgeführten Würfe. Wenn k ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank k Euro. Andernfalls (k gerade) zahlt die Bank k Euro an den Spieler.

$$G := \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beispiel: Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Head“ zeigt. Sei k die Anzahl der durchgeführten Würfe. Wenn k ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank k Euro. Andernfalls (k gerade) zahlt die Bank k Euro an den Spieler.

$$G := \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wie schon gesehen, gilt dann

$$\Pr[\text{„Anzahl Würfe} = k\text{“}] = (1/2)^k \ .$$

Beispiel: Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Head“ zeigt. Sei k die Anzahl der durchgeführten Würfe. Wenn k ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank k Euro. Andernfalls (k gerade) zahlt die Bank k Euro an den Spieler.

$$G := \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wie schon gesehen, gilt dann

$$\Pr[\text{„Anzahl Würfe} = k\text{“}] = (1/2)^k \ .$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[G] \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \ .$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k ,$$

existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[G]$.

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k ,$$

existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[G]$.

Es gilt

$$\mathbb{E}[G] \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \left[(2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right]$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k},$$

existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[G]$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[(2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \cdot \left[(2j-1) - j \right] \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k ,$$

existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[G]$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[(2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \cdot [(2j-1) - j] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2}{9} .
\end{aligned}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von k Euro jeweils auf 2^k Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade ,} \end{cases}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von k Euro jeweils auf 2^k Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade ,} \end{cases}$$

dann existiert $\mathbb{E}[G']$ nicht, da

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G'] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = +1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots . \end{aligned}$$