Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

WS 2004/05
Semestralklausur
12. Februar 2005

Semestralklausur Diskrete Strukturen I

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ ☐☐
- Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb einer Aufgabe).
- Die Arbeitszeit beträgt 150 Minuten.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	Σ	Korrektor
Erstkorrektur												
Zweitkorrektur												

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch).

Die de l'Hopitalsche Regel besagt, daß Folgen $f(n)$ und $g(n)$, die den gleichen Grenzwert besitzen, von gleicher Ordnung sind, d. h. $f(n) \in \Theta(g(n))$.	J | N
$log_3 n \in \omega(n)$.	J | N
$\sqrt[3]{n^2} \in o(n)$.	J | N
Die Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ auf $\{1, 2\}$ ist 8.	J | N
Die Anzahl der injektiven Abbildungen einer $m-$elementigen Menge M in eine $n-$elementige Menge N ist n^m.	J | N
Es gibt eine Partition der leeren Menge.	J | N

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch).

Wenn N Normalteiler einer multiplikativen Gruppe $(G, \circ)$ ist, dann gilt $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in N$.	J | N
Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.	J | N
In $\mathbb{Z}[x]$ gilt $(x^2 - 5x + 4)$ mod $(x - 2) = 2$.	J | N
Für die zyklische Permutation $(1, 2)$ aus S_2 gilt $(1, 2)(1, 2) = (1)(2)$.	J | N
GF(6) ist ein Körper mit 6 Elementen.	J | N
$\mathbb{Z}_4$ mit $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist isomorph zum Körper GF(4).	J | N
Die Charakteristik des Körpers GF(8) ist 2.	J | N
$x^2 + 2$ ist reduzibel in $\mathbb{Z}_3[x]$.	J | N

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch).

Es gibt eine Menge P von 6 Personen, für die folgendes gilt: P enthält eine Person A, die alle anderen Personen der Menge kennt, und alle Personen in P ausser A kennen genau 2 Personen in P. (Hinweis: wenn gilt "a kennt b", dann gilt auch "b kennt a".)	J | N
Es gibt genau 2 Möglichkeiten, 2 nicht unterscheidbare Bälle auf 3 nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen.	J | N
Jeder (einfache, ungerichtete) Graph mit m Kanten und $m + 1$ Knoten ist ein Baum.	J | N
Ein Wald mit 9 Knoten und 6 Kanten enthält genau 3 Bäume.	J | N
Jeder zusammenhängende, $4-$reguläre Graph enthält eine Eulertour (Eulerkreis).	J | N
Jede Eulertour ist ein einfacher Kreis.	J | N
Der K_4 besitzt genau 3 verschiedene Hamiltonkreise.	J | N

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch).

Es gibt einen (einfachen, ungerichteten) Graph mit Gradfolge $(1, 1, 2, 3, 4)$.	J / N
Jeder $k-$reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis.	J / N
Jeder $2-$reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.	J / N
Der Prüfer-Code definiert Prüfbits für Spannbäume.	J / N
Es gibt einen Graphen, der keinen planaren Teilgraphen enthält.	J / N
Jeder Graph G mit chromatischer Zahl $\chi(G)$ besitzt eine Knotenfärbung mit $\chi(G)+1$ Farben.	J / N

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als Zahl an.

Berechnen Sie 1000^{999} *mod* 99. ....

Wieviele Elemente enthält der Körper $GF(3)[x]/(x-1)$? ....

Berechnen Sie $\Delta^2(\frac{n(n-1)}{2})$. (Hinweis: $\Delta a(n) = a(n+1) - a(n)$.) .

Berechnen Sie den Koeffizienten von x^2y^3 in $(x + 2y + z)^5$. ......

Berechnen Sie a_{100}, wenn $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ und $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ gilt für alle $n \geq 0$. ....

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) In jeder zyklischen additiven Gruppe G mit ungerader Ordnung $n = |G|$ ist die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0.

(b) Es gibt keine zyklische additive Gruppe G mit gerader Ordnung $n = |G|$, in der die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Gegeben sei die Rekursion

$$a_n + 3a_{n-1} - 4a_{n-3} = 0 \qquad \forall n \geq 3$$

mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ und $a_2 = 9x$.

(a) Welche weiteren Nullstellen ausser 1 besitzt das charakteristische Polynom der Rekursion?

(b) Bestimmen Sie die Lösung a_n der Rekursion in Abhängigkeit von n und x.

(c) Geben Sie eine rationale Funktion $F(z)$ an, die die Folge a_n erzeugt.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Die Folge $a_n = n \cdot [(1-i)^n + (1+i)^n]$ für alle $n \geq 0$ (mit $i^2 = -1$), erfüllt eine lineare Rekursion

$$a_{n+4} + q_1 \cdot a_{n+3} + q_2 \cdot a_{n+2} + q_3 \cdot a_{n+1} + q_4 \cdot a_n = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten q_1, q_2, q_3 und q_4.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $G = (V, E)$ ein $(n-2)$-regulärer Graph mit n Knoten.

(a) Geben Sie mit $n = 6$ ein Beispiel für G an.

(b) Zeigen Sie für alle geraden $n \in \mathbb{N}$, dass für die chromatische Zahl $\chi(G)$ gilt $\chi(G) = \frac{n}{2}$.

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Der Digraph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sei gegeben durch seine Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine zeichnerische Darstellung des Graphen an.

(b) Interpretieren Sie alle Kantengewichte als 1 und berechnen Sie mit dem Floyd-Warshall-Algorithmus die Matrix D der kürzesten Weglängen zwischen den Knoten (längs gerichteter Wege). Dokumentieren Sie dabei die 4 Matrizen $D^{(k)}$ der Zwischenergebnisse des Floyd-Warshall-Algorithmus, die sich aus den kürzesten Wegen mit den jeweils ersten k Knoten als innere Pfadknoten ergeben. (Es gilt dann $D = D^{(4)}$.)
