$$
\begin{array}{c}
v_i \backslash e_j \quad B \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
B^T \quad v_j / e_i \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
= (p_{ij})_{5,6}
$$

$p_{1,1} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 2$

$\approx$ v_1 inzidiert mit e_1 und e_4, also $d(v_1) = 2$

$p_{1,2} = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \end{array}\right\} \text{inzidiert mit} \left\{\begin{array}{l} e_1 \text{ und } e_4 \\ e_1,\ e_2 \text{ und } e_5 \end{array}\right\} \text{Also } e_1 = \{v_1, v_2\}$$

Generell: $\left.\begin{array}{l} v_i \\ v_j \end{array}\right\}$ inzid. mit $\left\{\begin{array}{l} \dots, e_k, \dots \\ \dots, e_k, \dots \end{array}\right.$

Da G einfach, existiert höchstens eine Kante e_k, die v_i und v_j verbindet – falls $i \neq j$;

Inzidenzmatrix bei <u>Digraphen</u> nur, wenn sie einfach, d.h. wenn v_i und v_j $(i \neq j)$ nur durch eine (gerichtete) Kante verbunden sind.

Korrektur der Def. der Inz-Matrix: e_j statt e_{ij} !

$B \cdot B^T = (p_{i,j})_{n,m}$: $p_{ij} = -1$, falls v_i Anfangsknoten von e_k und v_j Endknoten von e_k. Ansonsten wie oben. <u>Beisp.</u>: $e_2 = (v_1, v_2)$; $b_{1,2} = -1$, $p_{1,2} = -1$

Matroide

Beisp. (vgl. Buch: Steger: DS 1)

$S = \{a_1, \dots, a_m\}$ Menge von (beliebigen) Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ $(n > 0)$

$\mathcal{U}$ = Mge aller $A \subseteq S$, bei denen die Vektoren aus A linear unabhängig sind.

Klar: $\emptyset \in \mathcal{U}$. $A \in \mathcal{U} \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$

Seien A, B aus $\mathcal{U}$, $|B| = |A| + 1$

B erzeugt einen $|B|$-dimensionalen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$

A 〃 〃 $(|A| = |B| - 1)$-dim. Unt-Raum $T' \subseteq \mathbb{R}^n$, der zu einem $|A|$-dim. Unterraum von T isomorph ist. Zu $B \setminus A$ existiert dann ein Vektor v, der zusammen mit T' (d.h. mit den Vektoren aus A) einen $|B|$-dim. Unterraum von $\mathbb{R}^n$ erzeugt, d.h. $A \cup \{v\}$ besteht aus lin. u.a. Vektoren, ist also Element von $\mathcal{U}$.
(vgl. Vorl. Lineare Algebra).

Satz: $G = (V, E)$ zshgd. unger. Graph
$F \subseteq 2^E$ sei Mge der kreisfreien Teilmengen von E.
$M = (E, F)$ ist Matroid vom Rang $|V| - 1$.

Beweis von Eigenschaft 3 der Matroide.

Seien A, B kreisfrei und $|B| = |A| + 1$.
Wir fassen A (bzw B) auf als Wald mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge A (bzw. B). Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten (Bäume) von A (bzw. B) ist $|V| - |A|$ (bzw $|V| - |B|$) (Isolierte Knoten sind Bäume!)

2 Fälle: (1) Es ex. Kante $e \in B$, die zwei Bäume aus A verbindet. Dann ist $A \cup \{b\}$ kreisfrei.

(2) Jede Kante aus B liegt in einem Baum von A, also liegt jeder B von B ganz in einem Baum von A.
Wegen $|A| = |B| - 1$ ist die Anzahl $|V| - |A| = |V| - |B| + 1$ der Bäume von A um 1 größer als die der Bäume von B. Also gibt es einen Baum von A, dessen Knoten nicht im Wald (V, B) auftauchen. Das ist ein Widerspruch!
Also gilt Fall 1, d.h. Eigensch. 3 ist erfüllt.