WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

12-16-2003

Abzählkoeffizienten

Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung

Gegeben: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

```
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix ∘ a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix ∘ k, N\{k})
    od
  fi
end
```

Aufruf: *appendlexlist*(λ, *N*)

Beispiel

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

Auflistung von Teilmengen

Sei $N = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $|N| = n$.

Definition

Seien $A, B \subseteq N$, $A \neq B$. Dann heißt A *lexikographisch kleiner als* B*, geschrieben* $A < B$*, wenn*

$$\max\{A \triangle B\} \in B$$

Beispiel

$N = \{0, 1, 2\}$;

$$2^N = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1,0\}, \{2\}, \{2,0\}, \{2,1\}, \{2,1,0\}\}$$

Auflistung von Teilmengen

Sei $N = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $|N| = n$.

Definition

Seien $A, B \subseteq N$, $A \neq B$. Dann heißt A *lexikographisch kleiner als* B*, geschrieben* $A < B$*, wenn*

$$\max\{A \triangle B\} \in B$$

Beispiel

$N = \{0, 1, 2\}$;

$$2^N = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1, 0\}, \{2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 1, 0\}\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

1. $N = \{0, \ldots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis 2^{n-1} in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
2. Sei $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0} = \left\{k \in N : 0 \le k \le n-1 \wedge a_k = 1\right\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

1. $N = \{0, \ldots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis 2^{n-1} in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
2. Sei $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0} = \Big\{k \in N \colon 0 \le k \le n-1 \wedge a_k = 1\Big\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung, zweite Variante:

Sei $N = \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

```
appendlexlist(set praefix, nat n)
  for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
    if k=1 then praefix:=praefix ∪{n} fi
    if n=0 then print(praefix)
    else
      appendlexlist(praefix,n − 1)
    fi
  od
end
```

Aufruf: *appendlexlist*$(\emptyset, n-1)$

Gray-Code

Definition

Ein *Gray-Code* $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *ist eine Permutation* $(g_0, \ldots, g_{2^n-1})$ *der Wörter in* $\{0,1\}^n$, *so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter* g_i *und* g_{i+1}, *für alle* $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, *in genau einer Position unterscheiden.*

$$
\begin{aligned}
GC(1) &:= (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0,1) \\
GC(n+1) &:= (0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \ldots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, \\
&\qquad 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \ldots, 1 \cdot g_{n,0})
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$GC(3) = (000\ 001\ 011\ 010\ 110\ 111\ 101\ 100)$$

Gray-Code

Definition

Ein *Gray-Code* $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *ist eine Permutation* $(g_0, \ldots, g_{2^n-1})$ *der Wörter in* $\{0,1\}^n$, *so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter* g_i *und* g_{i+1}, *für alle* $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, *in genau einer Position unterscheiden.*

$$
\begin{aligned}
GC(1) &:= (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1) \\
GC(n+1) &:= \big(0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \ldots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, \\
&\qquad 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \ldots, 1 \cdot g_{n,0}\big)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$GC(3) = (000\ 001\ 011\ 010\ 110\ 111\ 101\ 100)$$

Gray-Code

Definition

Ein *Gray-Code* $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *ist eine Permutation* $(g_0, \ldots, g_{2^n-1})$ *der Wörter in* $\{0,1\}^n$, *so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter* g_i *und* g_{i+1}, *für alle* $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, *in genau einer Position unterscheiden.*

$$\begin{aligned} GC(1) &:= (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0,1) \\ GC(n+1) &:= (0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \ldots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, \\ &\qquad 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \ldots, 1 \cdot g_{n,0}) \end{aligned}$$

Beispiel

$$GC(3) = (000\ 001\ 011\ 010\ 110\ 111\ 101\ 100)$$

Lemma

1. $GC(n)$ *hat Länge* 2^n.
2. $\{g_{k,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\} = \{0,1\}^n$.
3. $g_{n,k}$ *unterscheidet sich für alle* k *von* $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ *in genau 1 Bit.*

Beweis.

$\square$

Lemma

1. $GC(n)$ *hat Länge* 2^n.
2. $\{g_{k,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\} = \{0,1\}^n$.
3. $g_{n,k}$ *unterscheidet sich für alle* k *von* $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ *in genau 1 Bit.*

Beweis.

□

Lemma

1. *$GC(n)$ hat Länge 2^n.*
2. $\{g_{k,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\} = \{0,1\}^n$.
3. *$g_{n,k}$ unterscheidet sich für alle k von $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ in genau 1 Bit.*

Beweis.

$\square$

Lemma

1. *$GC(n)$ hat Länge 2^n.*
2. $\{g_{k,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\} = \{0,1\}^n$.
3. *$g_{n,k}$ unterscheidet sich für alle k von $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ in genau 1 Bit.*

Beweis.

$\square$

Summation und Differenzenoperator

Direkte Methoden

1. Indextransformation Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

Beispiel

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \ldots + n \cdot a = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n - k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} k \cdot a + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a \right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} k \cdot a + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a\right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a \end{aligned}$$

2. Induktion
Beispiel

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 4 \qquad S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

2. Induktion
Beispiel

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 4 \qquad S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

2. Induktion
Beispiel

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 4 \qquad S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ trivial Induktionsschluss: $n \to n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2(n + 1) - 1 \overset{\text{IA}}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n + 1)^2$$

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ trivial Induktionsschluss: $n \to n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2(n+1) - 1 \stackrel{\text{IA}}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2$$

Beispiel

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \le A$.

Beispiel

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beispiel

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beispiel

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ trivial, $n = 2$ durch Einsetzen:

$$(G \leq A) \equiv \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}\right)$$
$$\equiv \left(4a_1 \cdot a_2 \leq (a_1 + a_2)^2\right)$$
$$\equiv \left(0 \leq {a_1}^2 - 2a_1 a_2 + {a_2}^2 = (a_1 - a_2)^2\right)$$

Induktionsschluss:
Wir zeigen:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ trivial, $n = 2$ durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}(G \leq A) &\equiv \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}\right) \\ &\equiv \left(4a_1 \cdot a_2 \leq (a_1 + a_2)^2\right) \\ &\equiv \left(0 \leq {a_1}^2 - 2a_1a_2 + {a_2}^2 = (a_1 - a_2)^2\right)\end{aligned}$$

Induktionsschluss:
Wir zeigen:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

1. Sei
$$b := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Damit:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$
$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1}$$

1. Sei
$$b := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$
Damit:
$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$
$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \quad \Rightarrow P_{n-1}$$

1. Sei
$$b := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$
Damit:
$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$
$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1}$$

1. Sei

$$b := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Damit:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)\cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \quad \Rightarrow P_{n-1}$$

2. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2n} a_i &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right) \\
&\overset{P_n}{\le} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n \\
&\overset{P_2}{\le} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n} \\
&\Rightarrow P_{2n}
\end{aligned}
$$

2. Es gilt:

$$\prod_{i=1}^{2n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)$$

$$\overset{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n$$

$$\overset{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow P_{2n}$$

2. Es gilt:

$$\prod_{i=1}^{2n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)$$

$$\stackrel{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n$$

$$\stackrel{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow P_{2n}$$

2. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2n} a_i &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right) \\
&\overset{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n \\
&\overset{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n} \\
&\Rightarrow P_{2n}
\end{aligned}
$$

2. Es gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2n} a_i &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)\\ &\overset{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\right)^n\cdot\left(\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{a_i}{n}\right)^n\\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\right)\cdot\left(\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{a_i}{n}\right)\right)^n\\ &\overset{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n}\\ &\Rightarrow P_{2n}\end{aligned}$$

Differenzenoperator

Definition

Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt *Translationsoperator.*

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ *heißt (Vorwärts-)Differenzoperator.*

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ *heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.*

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$
$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Differenzenoperator

Definition

Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt *Translationsoperator.*

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ *heißt (Vorwärts-)Differenzoperator.*

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ *heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.*

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$
$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Differenzenoperator

Definition

Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt *Translationsoperator.*

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ *heißt (Vorwärts-)Differenzoperator.*

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ *heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.*

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$
$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Differenzenoperator

Definition

Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt *Translationsoperator.*

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ *heißt (Vorwärts-)Differenzoperator.*

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ *heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.*

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$
$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \cdots \circ E)}_{a}(f)(x) = f(x + a)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$$

2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4. $$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \cdots (E - I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$$

2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4. $$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \cdots (E - I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$$

2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4. $$\Delta^n = (E-I)^n = \underbrace{(E-I)\cdots(E-I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$$

2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big),\ \text{i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4. $$\Delta^n = (E-I)^n = \underbrace{(E-I)\cdots(E-I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)$$